Ejercicio 19, solución

Sea μ^* la medida exterior inducida por una premedida finita μ_0 en un conjunto X. Se define la **medida interior** de un subconjunto E de X como $\mu_*(E) = \mu_0(X) - \mu^*(E^c)$. Demuestra que E es μ^*-medible si y solo si $\mu^*(E) = \mu_*(E)$.

Comentario

Observa que la condición $\mu^*(E) = \mu_*(E)$ es la misma que $\mu_0(E) = \mu^*(E) + \mu^*(E^c)$.

Que μ^*-medible implica $\mu^*(E) = \mu_*(E)$ no es más que un caso particular de la definición de μ^*-medibilidad.

Para demostrar la implicación inversa no parece fácil demostrar directamente que para todo $C \subset X$, $\mu^*(C) = \mu^*(C \setminus E) + \mu^*(C \cap E)$ ya que en general (es decir, si la medida exterior no procede necesariamente de una premedida) la coincidencia de la medida interior con la medida exterior no implica la medibilidad.

EJERCICIO. Busca un ejemplo en el que $\mu^*(X) - \mu^*(E^c) = \mu^*(E)$ no implique que $\forall C \subset X$, $\mu^*(C) = \mu^*(C \setminus E) + \mu^*(C \cap E)$. Es fácil conseguir un ejemplo en el que X tenga solamente un número finito de elementos (por ejemplo,cuatro).

La demostración pedida en el ejercicio puede hacerse utilizando la caracterización del ejercicio **18.b.**

Demostración

Es suficiente ver que existe $A_1 \in \mathcal{A}_{\delta\sigma}$ tal que $E \subset A_1$ y $\mu^*(A_1 \setminus E) = 0$.

El ejercicio **18.a.** implica que existe $A_1 \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E \subset A_1$ y $\mu^*(A_1) = \mu^*(E)$, y también existe $A_2 \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ tal que $E^c \subset A_2$ y $\mu^*(A_2) = \mu^*(E^c)$. Obviamente $X = A_1 \cup A_2$ por tanto la unión $X = A_2^c \cup (A_2 \cap A_1) \cup A_1^c$ es disjunta y dado que los tres son medibles $\mu_0(X) = \mu^*(A_2^c) + \mu^*(A_1 \cap A_2) + \mu^*(A_1^c) = \mu^*(E) + \mu^*(A_1 \cap A_2) + \mu^*(E^c) = \mu_0(X) + \mu^*(A_1 \cap A_2)$. Por tanto $\mu^*(A_1 \cap A_2) = 0$, y dado que $A_1 \setminus E \subset A_1 \cap A_2$ resulta que $\mu^*(A_1 \setminus E) = 0$.