Ejercicio 18, solución

18. Dada una álgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$, sea $\mathcal{A}_\sigma$ la colección de uniones numerables de conjuntos de $\mathcal{A}$, y $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ la colección de intersecciones numerables de conjuntos de $\mathcal{A}_\sigma$. Sean μ_0 una premedida de $\mathcal{A}$ y μ^* su medida exterior inducida.

a. Si $E \subset X$ y $\varepsilon > 0$ demuestra que existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E \subset A$ y $\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon$.

b. Si $\mu^*(E) < \infty$ demuestra que E es μ^*-medible si y solo si $\exists B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$, $E \subset B$ con $\mu^*(B \setminus E) = 0$.

c. Comprueba que si μ_0 es σ-finita entonces no es necesaria la restricción $\mu^*(E) < \infty$ en el apartado anterior.

Preliminares

Observa que $\mathcal{A}_\sigma$ está cerrada por uniones numerables, pero también por intersecciones finitas. De igual forma $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ está cerrada por intersecciones numerables, pero también por uniones finitas.

También, $(\cup A_j) \setminus (\cup E_j) \subset \cup(A_j \setminus E_j)$.

a.

Por definición, $\exists \{A_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ tal que $E \subset A = \cup A_j \in \mathcal{A}_\sigma$ y $\mu^*(E) \geq \sum_{j=0}^\infty \mu_0(A_j) + \varepsilon \geq \mu^*(A) + \varepsilon$.

Observación para lo que sigue: Si $\mu^*(E) < \infty$ entonces, si E es μ^*-medible, la conclusión del apartado **a.** implica que $\mu^*(A \setminus E) \leq \varepsilon$.

b.

Según **a.** , $\forall n = 1, 2, \dots, \exists A^n \in \mathcal{A}_\sigma$, tal que $E \subset A^n$ y $\mu^*(A^n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$.

Sea $A = \cap A^n$ entonces $E \subset A \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ y $\forall n$, $\mu^*(A \setminus E) \leq \mu^*(A^n \setminus E) \leq \frac{1}{n}$. Por tanto $\mu^*(A \setminus E) = 0$.

La implicación inversa es obvia, dada la completitud de la medida inducida por la medida exterior.

c.

No utilizamos **b.** , aplicamos **a.** directamente:

Primero, por la σ-finitud, existe una colección numerable $\{C_j\} \subset \mathcal{A}$ tal que $\cup C_j = X$ y $\forall j$, $\mu_0(C_j) < \infty$. Dado E, sea $E_j = E \cap C_j$. Sea (ε_j) una sucesión decreciente de números reales positivos tal que $\sum \varepsilon_j = 1$. Según **a.** existe $A_j^n \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que $E_j \subset A_j^n$ y $\mu^*(E_j \setminus A_j^n) \leq \frac{1}{n}\varepsilon_j$. Entonces $A^n = \cup A_j^n \in \mathcal{A}_\sigma$, $E \subset A^n$ y $\mu^*(A^n \setminus E) \leq \sum \mu^*(A_j^n \setminus E_j) \leq \frac{1}{n}$.

Se toma entonces $A = \cap A^n \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$; $E \subset A$ y $\forall n$, $\mu^*(A \setminus E) \leq \frac{1}{n}$. Por tanto $\mu^*(A \setminus E) = 0$.