1.- Hallar las integrales de superficie:

(a) $\displaystyle\iint_S z\,dS$ con S el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

(b) $\displaystyle\iint_S (x+y+z)\,dS$ con S la esfera unidad $x^2+y^2+z^2=1$.

(c) $\displaystyle\iint_S (x\,y\,z)\,dS$ con S el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

(d) $\displaystyle\iint_S z^2\,dS$ donde S es la frontera del cubo $Q=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. (Sugerencia: hacer cada cara por separado y sumar los resultados)

2.- La temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ viene dada por la función $T(x,y,z)=y$. Calcular el flujo del calor a través de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1,\ y>0$ orientada con la normal exterior. (Se supone que el calor se propaga como un fluido con un campo de velocidades cuyo potencial es la temperatura)

3.- La temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ viene dada por la función $T(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Calcular el flujo del calor a través del cilindro (sin tapas) $x^2+y^2=1$, $0\le z\le 1$ orientado de tal forma que la normal apunta hacia fuera del cilindro.

4.- Hallar el flujo del campo de vectores F a través de la superficies S con la orientación dada:

(a) $F(x,y,z)=(x,y,0)$ con S la gráfica del paraboloide de revolución $z=x^2+y^2$, para $x^2+y^2\le 1$, orientado de tal forma que la normal apunte hacia las z's positivas.

(b) $F(x,y,z)=(x+3\,y^5, y+10\,x\,z, z-x\,y)$ con S el hemisferio superior de la esfera unidad con normal apuntando hacia el exterior.

(c) $F(x,y,z)=(3\,x\,y^2, 3\,x^2\,y, z^3)$ con S el cilindro $x^2+y^2=1$, $0\le z\le 4$, con normal apuntando hacia el exterior.

5.- Calcular

$$\int\int_S \nabla\times F\cdot dS,$$

donde $F=(-y,x^2,z^3)$ y S es la porción de superficie esférica dada por $x^2+y^2+z^2=1$, $\dfrac{-1}{2}\le z\le 1$ con la orientación dada por la normal exterior a la esfera.

En concreto, se pide calcular la integral de tres formas diferentes:

a) Usando la definición.

b) Aplicando el Teorema de Stokes y

c) Aplicando el Teorema de Gauss.

6.- Calcular $\displaystyle\iint_S \nabla \times F \cdot dS$, donde

(*a*) $F(x,y,z) = \Big(-\dfrac{y}{2}+z^2\,e^y+\text{sen}(z\,e^x), \dfrac{x}{2}+(1+x^2)\,\log(1+z), \log(1+x^2+y^2+z^2)\Big)$ y S es el hemisferio superior de la esfera unidad orientado de tal formal que la normal apunta hacia el exterior.

(*b*) $F(x,y,z) = (z\,x + z^2\,y + x, z^3\,y\,x + y, z^4\,x^2)$ y S es la unión de las superficies S_1, S_2

$$S_1 = \big\{(x,y,z):\ x^2+y^2=1,\ 0 \le z \le 1\big\},$$

$$S_2 = \big\{(x,y,z):\ x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ z \ge 1\big\}.$$

La superficie S está orientada de forma que la normal apunta hacia el exterior.

7.- Calcular la integral de superficie $\displaystyle\iint_S \nabla\times F\cdot dS$, donde S es el hemisferio $x^2+y^2+z^2=1$, $x \ge 0$ y el campo de vectores F viene dado por $F(x,y,z) = (x^3, -y^3, 0)$.

8.- Verificar el teorema de Gauss en $\Omega = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ para los campos de vectores $F_1(x,y,z) = (x,y,z)$ y $F_2(x,y,z) = (x^2,y^2,z^2)$.

9.- Sea $F(x,y,z) = (z,y,y\,z)$, evaluar $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F \cdot dS$ donde

$$(a)\ \Omega = \big\{(x,y,z):\ x^2+y^2 \le z \le 1\big\}$$

$$(b)\ \Omega = \big\{(x,y,z):\ x^2+y^2 \le z \le 1,\ x \ge 0\big\}$$

10.- Dado $F(x,y,z) = \big(x\,(z^2+y^2), y, e^x\,\arctan(x\,y)\big)$ hallar $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F \cdot dS$ donde Ω es el cilindro $y^2+z^2 \le 1$, $0 \le x \le 1$.

11.- Hallar el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie dada por $z = 4-(x^2+y^2)$, $z \ge 0$, con normal de forma que su coordenada z es positiva.

12.- Evaluar la integral $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F\cdot dS$ donde $F(x,y,z) = (1,1,z\,(x^2+y^2))$ y Ω es el cilindro $x^2+y^2 \le 1$, $0 \le z \le 1$.