1.- Sea $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2;\ 1 \leq y \leq 2\}$ y sea $f : E \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+y} & \text{si } x \geq y, \\ 0 & \text{si } x < y, \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable sobre E y calcular su integral.

2.- Sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2;\ 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$ y sea f la función continua en A dada por $f(x,y) = xe^{-x^2/y}$. Calcular la integral de f sobre A.

3.- Sean $0 < b < a$. Consideramos $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ y $f : A \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = 1$. Calcular la integral de f sobre A. ¿Qué interpretación geométrica tiene dicha integral?

4.- Calcular la integral de $f(x,y) = (x+y)^2$ sobre el triángulo cuyos vértices son $(0,0)$, $(0,1)$ y $(2,2)$.

5.- Se considera la pirámide limitada por los tres planos coordenados y el plano $x+2y+3z = 6$. Dibujarla y expresar su volumen mediante una integral triple. Calcular la integral y comprobar que su valor coincide con el volumen obtenido por la fórmula elemental de la geometría euclídea.

6.- En cada uno de los siguientes apartados, se supone que f es una función integrable sobre una región Ω y que su integral sobre Ω coincide con la integral iterada que se da. En cada caso, se pide identificar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración:

$$(a)\ \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx \right) dy. \qquad (b)\ \int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^{2} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

$$(c)\ \int_1^e \left(\int_0^{\log x} f(x,y)\,dy \right) dx. \qquad (d)\ \int_0^{\pi/2} \left(\int_{-\operatorname{sen} x}^{\cos x} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

7.- Hallar el valor de la integral

$$\int_\Omega e^{(y-x)/(y+x)}\,dx\,dy,$$

donde Ω es el triángulo determinado por la recta $x+y = 2$ y los dos ejes coordenados. Utilícese un cambio lineal de variables.

8.- Sea $a > 0$. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$, la superficie $x^2 + y^2 = az$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$.

9.- Sea $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ y sea $f :\ B \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Calcular la integral de f sobre B.

10.- Sea $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ y sea $f :\ B \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Calcular la integral de f sobre B.

11.- Sea $a > 0$. Calcular el volumen limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ay$ (Cúpula de Viviani).

12.- Calcular el volumen encerrado por el plano $z = 0$, los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ y la superficie $z = xy$.

13.- Calcular el volumen limitado por los cilindros $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.

14.- Calcular el volumen limitado por la superficie $z = 2x^2 + y^2 + 1$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = 1$.

15.- Consideramos la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = v - u^2. \end{cases}$$

(a) Calcular su Jacobiano $J(u, v)$.

(b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0,0), (2,0), (0,2)$.

(c) Calcular $\displaystyle\int_\Omega \frac{1}{(x - y + 1)^2}\, dx\, dy$.

16.- Demostrar la igualdad

$$\int_\Omega f(x\,y)\, dx\, dy = \log 2 \int_1^2 f(u)\, du,$$

siendo Ω la región del primer cuadrante limitada por las curvas

$$x\,y = 1, \qquad x\,y = 2, \qquad \frac{y}{x} = 1, \qquad \frac{y}{x} = 4.$$

17.- Sea $\mathbb{D} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 : \ s^2 + t^2 \leq 1\}$. Sea $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(s,t) = (s + t, s - t, s)$. Calcular el área de $\varphi(\mathbb{D})$.

18.- Calcular el área del helicoide, que es la superficie parametrizada por $\psi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta, \theta)$ para $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi n$, donde n es un entero positivo.

19.- Se perfora un agujero cilíndrico de radio b a través de una bola de radio $a > b$ para formar un anillo. Calcular la superficie exterior del anillo.

20.- Encontrar el área de la porción del paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy.

21.- Encontrar el área de la porción del paraboloide $z = 2x^2 + 2y^2$ cortada por los planos $z = 2$ y $z = 8$.

22.- Calcular el centro de masas del tetraedro cuyos vértices son $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$ y $(0,0,3)$.

23.- Calcular el centro de masas del tetraedro del problema anterior suponiendo que la densidad en cada punto (x,y,z) del tetraedro viene dada por $\rho(x,y,z) = x + y + z + 1$.

24.- Calcular el centro de masas de un cono circular recto de radio a y altura h.

25.- Sea W el sólido limitado por el cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 4$. Suponiendo que la densidad del material del que está hecho W varía como $\rho(x,y,z) = 5 - z$, calcular el momento de inercia de W alrededor del eje z.