1.- Las relaciones $u = f(x, y),\ x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$.

(a) Aplicar la regla de la cadena para demostrar que

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dt},$$

donde las derivadas parciales de f están calculadas en el punto $(x(t), y(t))$.

(b) Calcular la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x, y) = e^{x\,y}\cos x\,y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

2.- La sustitución $t = g(x, y)$ convierte $F(t)$ en $f(x, y) = F(g(x, y))$.

(a) Demostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F'(g(x, y))\,\frac{\partial g}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = F'(g(x, y))\,\frac{\partial g}{\partial y}.$$

(b) Calcular la matriz de $Df(x, y)$ en el caso particular en que

$$F(t) = e^{\operatorname{sen} t} \quad \text{y} \quad g(x, y) = \cos\,(x^2 + y^2).$$

3.- El cambio de variables

$$u = \frac{x - y}{2}, \qquad v = \frac{x + y}{2},$$

cambia la función $f(u, v)$ en $F(x, y)$. Aplicar la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x, y)$ en función de las derivadas parciales de f.

4.- Las ecuaciones $u = f(x, y)$, $x = x(s, t)$ e $y = y(s, t)$ definen u como función de las variables (s, t). Expresar las derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial t},$$

en términos de las diversas derivadas parciales de f, x e y. Resolver este mismo ejercicio en el caso particular en que

$$x(s, t) = s\,t, \qquad y(s, t) = \frac{s}{t}.$$

5.- Sean $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ funciones vectoriales definidas mediante

$$f(x, y) = (e^{x+2y}, \operatorname{sen}(2x + y)), \qquad g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3v^3, 2v - u^2).$$

Hallar cada una de las matrices de $Df(x, y)$ y $Dg(u, v, w)$. Calcular la función compuesta $h(u, v, w) = f(g(u, v, w))$. Calcular la matriz de $Dh(1, -1, 1)$.

6.- Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Sea h la función compuesta $h = f \circ g$. Demostrar que

$$\|\nabla h(x, y, z)\|^2 = 4\,g(x, y, z)\,\big(f'(g(x, y, z))\big)^2.$$

7.- Sean f una función diferenciable en cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $g = (g_1, g_2)$ la función vectorial

$$g(u, v, w) = (u^2 + v^2 + w^2, u + v + w).$$

Considérese la función compuesta $h = f \circ g$ y demuéstrese que

$$\|\nabla h\|^2 = 4\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 g_1 + 4\,\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y}\,g_2 + 3\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

8.- Hallar la función derivada $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, siendo $f(x, y) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\,dt$, definida para $x > 0, y > 0$.

9.- Considérese la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) ¿Es $f(x,y)$ continua en $(0,0)$?

(b) Hallar las derivadas parciales de f en el punto $(0,0)$.

(c) Sea $g(t) = (t, 2t)$, $t \in \mathbb{R}$. Hallar la función compuesta $f \circ g$ y la derivada $(f \circ g)'(0)$. ¿Se puede calcular esta derivada utilizando la regla de la cadena?

10.- La función $F(u,v)$ se define mediante la fórmula

$$F(u,v) = \int_0^v f(u,t)\, dt.$$

Si se imponen condiciones apropiadas a la función f, se deduce que la función F tiene derivadas parciales que se pueden expresar a partir de las de f. Formular un resultado de este tipo.

Utilizar la regla de la cadena para comprobar que, con las hipótesis adecuadas sobre f,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^x f(x,y)\, dy = f(x,x) + \int_0^x \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\, dy.$$

11.- Sean $f(x)$ y $G(x,y)$ funciones diferenciables tales que $G(x, f(x)) = 0$ se cumple en todos los x donde f está definida.

(a) Demostrar que

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{\partial G}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial G}{\partial y}(x, f(x))}$$

se cumple en todos los puntos $(x, f(x))$ donde el denominador es distinto de 0.

(b) Para $y = f(x)$ definida mediante la ecuación $x^2 + y^3 + e^y = 0$. Hallar $f'(x)$ en términos de x e y.

12.- Supongamos que la ecuación $y^2 + xz + z^2 - e^z - k = 0$ define z como función de x e y, sea ésta $z = f(x,y)$. Hallar el valor de la constante k para el cual $f(0,e) = 2$ y calcular $\nabla f(0,e)$.

13.- Sea $u = u(x,y)$ definida mediante la ecuación $u = F(x+u, y\,u)$. Hallar $\nabla u(x,y)$ en términos de las derivadas parciales de F.

14.- Las dos ecuaciones

$$e^u \cos v = x, \qquad\qquad e^u \operatorname{sen} v = y,$$

definen u y v como funciones de x e y, digamos $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$, válidas para $x > 0$. Hallar los vectores gradientes $\nabla u(x,y)$ y $\nabla v(x,y)$.

15.- Hallar el vector tangente a la curva $\sigma(t) = (t^2, t^3)$ en el punto $(1,-1)$. Escribir la ecuación de la recta tangente correspondiente. ¿Existe el vector tangente en el punto $(0,0)$?

16.- Una partícula se mueve en el espacio $\mathbb{R}^3$ por la trayectoria $\sigma(t) = (t\,\cos t, t\,\operatorname{sen} t, t^2)$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Determinar su vector velocidad en el punto $(0, \pi/2, \pi^2/4)$ y la recta tangente en dicho punto.

17.- Hallar la ecuación de los planos tangentes a la gráficas de las funciones:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$, en el punto $(1,1,0)$.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en un punto genérico (x_0, y_0, z_0). ¿En qué puntos es el plano tangente paralelo al plano $x = z$?

18.- Consideremos el lugar geométrico de los puntos $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ para los cuales $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$. ¿Existe un plano tangente en el origen? ¿Por qué?

19.- Si (a,b,c) es un punto de la superficie $z = x\,y$, las dos rectas

$$\left\{ \begin{array}{l} z = b\,x, \\ y = b, \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad \left\{ \begin{array}{l} z = a\,y, \\ x = a, \end{array} \right.$$

se cortan en (a,b,c) y están situadas en la superficie. Comprobar que el plano tangente a esta superficie en el punto (a,b,c) contiene a esas dos rectas.

20.- Hallar la ecuación de la recta tangente a las dos superficies $x^2+y^2+2\,z^2 = 4$ y $z = e^{x-y}$ en el punto $(1,1,1)$.

21.- Hallar una constante c tal que en todo punto de la intersección de las dos esferas $(x-c)^2+y^2+z^2 = 3$ y $x^2+(y-1)^2+z^2 = 1$ los planos tangentes correspondientes sean perpendiculares el uno a otro.

22.- Calcular las derivadas direccionales de la funciones:

(a) $f(x,y,z) = 3\,x - 5\,y + 2\,z$ en el punto $(2,2,1)$ en la dirección de la normal a la esfera $x^2+y^2+z^2 = 9$.

(b) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$ en un punto cualquiera de la superficie $x^2+y^2+z^2 = 4$, en la dirección de la normal exterior en dicho punto.

23.- Definamos la función

$$f(x,y) = y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \qquad (x,y) \neq (0,0), \qquad\qquad f(0,0) = (0,0).$$

Calcular, cuando existan, las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0), \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0).$$

24.- Sea

$$f(x,y) = x\,y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \qquad \text{si} \qquad (x,y) \neq (0,0), \qquad\qquad f(0,0) = (0,0).$$

Comprobar que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ y $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

25.- El cambio de variable $x = u + v$, $y = u\,v^2$ transforma $f(x,y)$ en $g(u,v)$. Calcular el valor de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}$ en el punto en el que $u = 1$, $v = 1$, sabiendo que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$$

en dicho punto.

26.- Demostrar que para cualquier constante positiva c, la función

$$u(x,t) = \frac{3c}{\cosh^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}\,(x - c\,t)\right)}$$

con $x, t \in \mathbb{R}$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$