

1.- Evaluar los límites siguientes, en caso de que existan y explicar porqué no existen en el caso contrario

$$\begin{aligned}
 (*) (a) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}. & (b) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}. & (*) (c) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x e^y}{x + y + 2}. \\
 (*) (d) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0), x \neq y} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}. & (e) \quad & \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}. & (*) (f) \quad & \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy - xz + yz}{x^2 + y^2 + z^2}.
 \end{aligned}$$

2.- En cada una de las funciones que siguen, se pide determinar los conjuntos de puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ donde están definidas y donde son continuas.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 y^2. & (b) \quad & f(x, y) = \tan \frac{x^2}{y}. & (c) \quad & f(x, y) = \frac{1}{\log(x^2 + y^2)}. \\
 (*) (d) \quad & f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}. & (e) \quad & f(x, y) = \frac{\cos x^2}{y}. & (f) \quad & f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.
 \end{aligned}$$

3.- (*) ¿Se pueden hacer continuas las funciones

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

definiéndolas de forma adecuada en $(0, 0)$?

4.- Hallar todas las derivadas parciales de primer orden de las siguientes funciones escalares.

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & f(x, y) = x^2 + y^2 \sin xy. \\
 (b) \quad & f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ definida en los } (x, y) \neq (0, 0). \\
 (c) \quad & f(x, y) = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}, \text{ definida para los } xy \neq 1.
 \end{aligned}$$

5.- (*) Considérese la función definida en los $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mediante

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4} \quad \text{si } x \neq 0, \quad f(0, y) = 0.$$

- (a) Demostrar que las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ existen y calcular su valor.
- (b) ¿Es $f(x, y)$ continua en $(0, 0)$?
- (c) ¿Es $f(x, y)$ diferenciable en $(0, 0)$?
- (d) Hallar la derivada direccional $D_{(u,v)}f(0, 0)$ para cada dirección $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

6.- Demuéstrese que la función $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ es continua en todo el plano y tiene las derivadas parciales en $(0, 0)$, pero no es diferenciable en el origen.

7.- Demuéstrese que la función definida mediante

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas parciales continuas en todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$ que no son continuas en el punto $(0, 0)$ y que, sin embargo, $f(x, y)$ es diferenciable en $(0, 0)$.

8.- Demostrar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

es diferenciable en cualquier punto del plano \mathbb{R}^2 .

9.- (*) Considérese la función

$$f(x, y) = (x^2 + y^4)^2 \max\{|3x + y|, |x - y|\}.$$

(a) Calcular las derivadas parciales y estudiar si f es diferenciable en $(0, 0)$.

(b) Demostrar que f es diferenciable en el punto $(3, -2)$ y calcular su diferencial en ese punto.

(c) ¿Existen las derivadas parciales de $f(x, y)$ en el punto $(-1, 1)$?

10.- (*) Sean $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones escalares dadas por $g(x) = \|x\|^4$ y $f(x) = \langle a, x \rangle$, siendo $a \in \mathbb{R}^n$ un vector fijo.

(a) Hallar las derivadas direccionales $D_v f(x)$ y $D_v g(x)$ para cada $x, v \in \mathbb{R}^n$.

(b) Tomando $n = 2$, hallar todas las direcciones $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ tales que $D_{(u,v)} g(2, 3) = 6$.

(c) Tomando $n = 3$, hallar todas las direcciones $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tales que $D_{(u,v,w)} g(1, 2, 3) = 0$.

11.- Sea $f(r, t) = t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}$, definida en los $r \geq 0$ y $t > 0$. Hallar un valor de la constante n tal que $f(r, t)$ satisfaga la ecuación

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) \quad (r, t > 0).$$

12.- Hallar el vector gradiente, en cada punto en el que exista, de las siguientes funciones escalares

(a) $f(x, y) = e^x \cos y$.

(b) $f(x, y, z) = \log(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$.

(*) (c) $f(x, y) = xy \operatorname{sen} \frac{1}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y $f(0, 0) = 0$.

13.- Hallar la matriz de $Df(a)$ en cada uno de los siguientes casos:

(*) (a) $f(x, y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1, 2)$.

(b) $f(x, y) = (\operatorname{sen}(x + y), \cos(x - y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.

(c) $f(x, y, z) = z^2 e^x \cos y$, $a = (0, \pi/2, -1)$.

(d) $f(x) = (e^x \operatorname{sen} x, e^x \cos x, x^2)$, $a = \pi/6$.

(*) (e) $f(x, y, z, t) = (\sqrt{y^2 + z^2}, \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + y^2 + z^2 - 9t^2)$, $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.