1.- Hallar una ecuación del plano

(a) perpendicular a $\mathbf{v} = (1,1,1)$ que pasa por el punto $(1,0,0)$;

(b) perpendicular a $\mathbf{v} = (1,2,3)$ que pasa por el punto $(1,1,1)$;

(c) perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5,0,2)t + (3,-1,1)$ que pasa por el punto $(5,-1,0)$;

(d) perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (-1,-2,3)t + (0,7,1)$ que pasa por el punto $(2,4,-1)$.

2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por

(a) $(0,0,0)$, $(2,0,-1)$ y $(0,4,-3)$;

(b) $(1,2,0)$, $(0,1,-2)$ y $(4,0,1)$;

(c) $(2,-1,3)$, $(0,0,5)$ y $(5,7,-1)$;

3.- Hallar la recta intersección de los planos

(a) $x + 2y + z = 0$ y $x - 3y - z = 0$;

(b) $x + (y-1) + z = 0$ y $-x + (y-1) - z = 0$;

(c) $2x - y - z = 3$ y $5x + 2y - 3z = 8$.

4.- Hallar la ecuación del plano que contiene las rectas (paralelas)

$$\mathbf{v}_1(t) = (0,1,-2) + t(2,3,-1) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2(t) = (2,-1,0) + t(2,3,-1).$$

5.- Calcular la distancia del punto $(2,1,-1)$ al plano $x - 2y + 2z + 5 = 0$.

6.- Hallar una ecuación del plano que contiene la recta $\mathbf{v}(t) = (-1,1,2) + t(3,2,4)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

7.- Hallar una ecuación del plano que pasa por $(3,2,-1)$ y por $(1,-1,2)$, y es paralelo a la recta $\mathbf{v}(t) = (1,-1,0) + t(3,2,-2)$.

8.- Calcular la distancia del plano $12x + 13y + 5z + 2 = 0$ al punto $(1,1,-5)$.

9.- Calcular la distancia del punto $(1,5,2)$ a la recta que pasa por $(2,2,1)$ y tiene la dirección del vector $\mathbf{v} = (0,3,1)$.

10.- Calcular la distancia entre las rectas $\mathbf{v}(t) = (1,2,-1) + t(1,1,1)$ y $\mathbf{w}(t) = (5,0,0) + t(0,-1,1)$.

11.- Demostrar que el plano que pasa por los puntos (a_1,a_2,a_3), (b_1,b_2,b_3) y (c_1,c_2,c_3) está formado por los puntos (x,y,z) que verifican

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ b_1 - x & b_2 - y & b_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

12.- Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y) = x - y + 2$ (b) $f(x,y) = x^2 + 4\,y^2$ (c) $f(x,y) = -x\,y$

(d) $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$ (e) $f(x,y) = (1 - (x^2 + y^2))^{\frac{1}{2}}$ (f) $f(x,y) = x^3 - x$

(g) $f(x,y) = \dfrac{x}{1 + y^2}$ (h) $f(x,y) = \text{máx}\left\{|x|, |y|\right\}$ (i) $f(x,y) = \text{sen}^2(x^2 + y^2)$

13.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x,y,z) = x - y - z + 2$. (b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$.

(c) $f(x,y,z) = y\,(x + z)$. (d) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$.

(e) $f(x,y,z) = \cos((x^2 + y^2) - z)$. ($f$) $f(x,y,z) = x - y$.

(g) $f(x,y,z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$. ($h$) $f(x,y,z) = -\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z$.

14.- Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $x = (4, b, 1)$ e $y = (a, b, 0)$ de $\mathbb{R}^3$, son ortogonales. ¿Cuál es el lugar geométrico del plano determinado por tales a y b?

15.- Hallar un vector de $\mathbb{R}^4$ perpendicular a $(1, 2, 1, 1)$, $(-2, 1, 0, 0)$ y $(3, 0, 1, -1)$.

16.- Hallar dos vectores de $\mathbb{R}^4$, perpendiculares a $(3, 2, 0, -2)$, $(1, 4, 2, 0)$ y $(2, -2, -2, -2)$, que sean perpendiculares entre sí.

17.- Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

(a) $2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$, (ley del paralelogramo).

(b) $\|x - y\| \cdot \|x + y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(c) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x + y\| = \|x - y\|$.

(d) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x + \lambda\, y\| \geq \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $\big|\,\|x\| - \|y\|\,\big| \leq \|x - y\|$.

Interpretar dichos resultados geométricamente en términos del paralelogramo formado por los vectores x e y.

18.- Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, determinar si son abiertos, si son cerrados y su frontera.

$$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\big\}, \qquad B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3\,x^2 + 2\,y^2 < 6\big\},$$

$$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\big\}, \qquad D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y > 1\big\},$$

$$E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 4,\ y < x^2\big\}, \qquad F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 1)\,(4 - x^2 - y^2) > 0\big\},$$

$$G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1\big\}, \qquad H = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\big\}.$$

19.- Calcular el cierre, el interior y la frontera de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\Big\}, \\ B &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}, \\ C &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\big\}. \end{aligned}$$

20.- (a) Demostrar que la intersección de dos abiertos es un abierto.

(b) Demostrar que la unión arbitraria de abiertos es abierta.

(c) Dar un contraejemplo que muestre que la intersección arbitraria de abiertos no es necesariamente un abierto.

21.- (a) Demostrar que la unión finita de dos cerrados es un cerrado.

(b) Demostrar que la intersección cualquiera de cerrados es un cerrado.

(c) Dar un contrajemplo que muestre que la unión cualquiera de cerrados no es necesariamente un cerrado.