1.- Hallar las integrales de superficie:

(a) $\iint_S z\,dS$ con S el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$.

(b) $\iint_S (x+y+z)\,dS$ con S la esfera unidad $x^2+y^2+z^2=1$.

(c) $\iint_S (x\,y\,z)\,dS$ con S el triángulo de vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

(d) $\iint_S z^2\,dS$ donde S es la frontera del cubo $Q=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$. (Sugerencia: hacer cada cara por separado y sumar los resultados)

2.- La temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ viene dada por la función $T(x,y,z)=y$. Calcular el flujo del calor a través de la semiesfera $x^2+y^2+z^2=1,\ y>0$ orientada con la normal exterior. (Se supone que el calor se propaga como un fluido con un campo de velocidades cuyo potencial es la temperatura)

3.- La temperatura en un punto de $\mathbb{R}^3$ viene dada por la función $T(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. Calcular el flujo del calor a través del cilindro (sin tapas) $x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1$ orientado de tal forma que la normal apunta hacia fuera del cilindro.

4.- Hallar el flujo del campo de vectores F a través de la superficies S con la orientación dada:

(a) $F(x,y,z)=(x,y,0)$ con S la gráfica del paraboloide de revolución $z=x^2+y^2$, para $x^2+y^2\le 1$, orientado de tal forma que la normal apunte hacia las z's positivas.

(b) $F(x,y,z)=(x+3\,y^5, y+10\,x\,z, z-x\,y)$ con S el hemisferio superior de la esfera unidad con normal apuntando hacia el exterior.

(c) $F(x,y,z)=(3\,x\,y^2, 3\,x^2\,y, z^3)$ con S el cilindro $x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 4$, con normal apuntando hacia el exterior.

5.- Calcular

$$\int\int_S \nabla\times F\cdot dS,$$

donde $F=(-y,x^2,z^3)$ y S es la porción de superficie esférica dada por $x^2+y^2+z^2=1,\ \frac{-1}{2}\le z\le 1$ con la orientación dada por la normal exterior a la esfera.

En concreto, se pide calcular la integral de tres formas diferentes:

a) Usando la definición.

b) Aplicando el Teorema de Stokes y

c) Aplicando el Teorema de Gauss.

6.- Calcular $\iint_S \nabla\times F\cdot dS$, donde

(a) $F(x,y,z)=\Big(-\frac{y}{2}+z^2\,e^y+\operatorname{sen}(z\,e^x), \frac{x}{2}+(1+x^2)\,\log(1+z), \log(1+x^2+y^2+z^2)\Big)$ y S es el hemisferio superior de la esfera unidad orientado de tal formal que la normal apunta hacia el exterior.

(b) $F(x,y,z)=(z\,x+z^2\,y+x, z^3\,y\,x+y, z^4\,x^2)$ y S es la unión de las superficies S_1, S_2

$$S_1=\big\{(x,y,z):\ x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 1\big\},\qquad S_2=\big\{(x,y,z):\ x^2+y^2+(z-1)^2=1,\ z\ge 1\big\}.$$

La superficie S está orientada de forma que la normal apunta hacia el exterior.

7.- Calcular la integral de superficie $\iint_S \nabla\times F\cdot dS$, donde S es el hemisferio $x^2+y^2+z^2=1$, $x\ge 0$ y el campo de vectores F viene dado por $F(x,y,z)=(x^3,-y^3,0)$.

8.- Verificar el teorema de Gauss en $\Omega = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$ para los campos de vectores $F_1(x,y,z) = (x,y,z)$ y $F_2(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$.

9.- Sea $F(x,y,z) = (z, y, y\,z)$, evaluar $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F \cdot dS$ donde

$$(a)\ \Omega = \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1\} \qquad (b)\ \Omega = \{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1,\ x \geq 0\}$$

10.- Dado $F(x,y,z) = \big(x\,(z^2 + y^2), y, e^x \arctan(x\,y)\big)$ hallar $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F \cdot dS$ donde Ω es el cilindro $y^2 + z^2 \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$.

11.- Hallar el flujo del campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ a través de la superficie dada por $z = 4 - (x^2 + y^2)$, $z \geq 0$, con normal de forma que su coordenada z es positiva.

12.- Evaluar la integral $\displaystyle\iint_{\partial\Omega} F \cdot dS$ donde $F(x,y,z) = (1, 1, z\,(x^2 + y^2))$ y Ω es el cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.

13.- Sea S una superficie suave que es la frontera de una región U de $\mathbb{R}^3$. Sea f una función armónica, es decir, una función que satisface

$$\triangle(f) \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

en algún abierto que contiene a U y a S. Si $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario a la superficie que apunta hacia afuera, sea $D_{\mathbf{n}} f$ la derivada direccional de f en la dirección de $\mathbf{n}$.

a) Demostrar que

$$\iint_S D_{\mathbf{n}} f d\sigma = 0, \ \text{ donde } \ d\sigma \text{ es el elemento de área sobre } \ S$$

b) Demostrar que

$$\iint_S f D_{\mathbf{n}} f d\sigma = \iiint_U \|\nabla f\|^2 dV.$$

14.- Sea $X = (x,y,z)$ y escribamos $\rho = \|X\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Demostrar que, para una superficie suave S que es la frontera de una región U, se cumplen las identidades

$$\iint_S X \cdot \mathbf{n} d\sigma = 3\mathrm{Vol}(U) \quad \text{y} \quad \iint_S \frac{X \cdot \mathbf{n}}{\rho^2} d\sigma = \iiint_U \frac{1}{\rho^2} dV,$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal unitario a la superficie apuntando hacia afuera.

15.- Sea q una constante y sea

$$f(X) = f(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\rho} \quad \text{donde} \quad \rho = \|X\|$$

a) comprobar que $\nabla \cdot \nabla(f) = 0$.

b) Calcular la integral del campo $E = -\nabla(f)$ sobre una esfera centrada en el origen.

16.- Sea S una superficie suave que es la frontera de una región U de $\mathbb{R}^3$. De nuevo escribimos $X = (x,y,z)$ y $\rho = \|X\|$.

a) Suponer que el origen O no está ni en U ni en S y demostrar que

$$\iint_S \frac{X \cdot \mathbf{n}}{\rho^3}\, d\sigma = 0.$$

¿Qué relación hay entre este apartado y el ejercicio 13?

b) Si el origen está contenido en U, demostrar que

$$\iint_S \frac{X \cdot \mathbf{n}}{\rho^3}\, d\sigma = 4\pi.$$

¿Qué relación hay entre este apartado y el ejercicio 15?