1.- Hallar la integral,

$$\int_\Gamma F(x,y)\,ds$$

del campo vectorial F a lo largo del camino orientado Γ que se indica. Dibujar en cada caso el camino de integración.

(*a*) $F(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$, a lo largo de la curva $y = 1-|1-x|$ desde $(0,0)$ hasta $(2,0)$.

(*b*) $F(x,y) = (x^2-2\,x\,y, y^2-2\,x\,y)$, siendo Γ el arco de parábola $y=x^2$ que une los puntos $(-2,4)$ y $(1,1)$.

(*c*) $F(x,y) = (x+y, x-y)$, siendo Γ la elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ recorrida en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

(*d*) $F(x,y) = (2-y, x)$ a lo largo del camino descrito por la cicloide $\sigma(t) = (t-\operatorname{sen} t, 1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$.

(*e*) $F(x,y) = \dfrac{1}{|x|+|y|}(1,1)$, donde Γ es el contorno del cuadrado de vértices $(1,0),(0,1),(-1,0)$ y $(0,-1)$ recorrido en el sentido contrario al de las agujas del reloj.

2.- Para cada $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ sea $F(x,y)$ el vector unitario que apunta desde (x,y) hacia el origen de coordenadas. Calcular el trabajo que realiza el campo F para desplazar una partícula desde la posición $(2a,0)$ hasta $(0,0)$ a lo largo de la semicircunferencia superior de $(x-a)^2+y^2=a^2$.

3.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^2+y^2)\,dx + (x^2-y^2)\,dy$, cuando Γ es el contorno del triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, orientado positivamente.

4.- Calcular la integral

$$\int_\Gamma y\,dx + x^2\,dy,$$

cuando Γ es la circunferencia $x^2+y^2=a\,x$, la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ y la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2\,\dfrac{x}{a}+2\,\dfrac{y}{b}$.

5.- Hallar el trabajo que realiza el campo $F(x,y)=(y^2+x^3, x^4)$ al recorrer el contorno del cuadrado $[0,1]\times[0,1]$ en el sentido de las agujas del reloj.

6.- Para cada uno de los siguientes campos vectoriales $F(x,y)$ definidos en $\mathbb{R}^2$, determinar si son gradientes de algún potencial $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. En caso afirmativo, calcular el potencial f.

(*a*) $F(x,y) = (3\,x^2y, x^3)$

(*b*) $F(x,y) = (\operatorname{sen} y - y\,\operatorname{sen} x + x, \cos x + x\,\cos y + y)$

(*c*) $F(x,y) = (2\,x\,e^y + y, x^2\,e^y + x - 2\,y)$

(*d*) $F(x,y) = (\operatorname{sen} x\,y + x\,y\,\cos x\,y, x^2\cos x\,y)$.

7.- Verificar el teorema de Green para $D = \big\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1\big\}$:

(*a*) $P(x,y)=x\,y^2$, $Q(x,y)=-y\,x^2$

(*b*) $P(x,y)=y$, $Q(x,y)=x+y$

(*c*) $P(x,y)=x\,y$, $Q(x,y)=x\,y$

(*d*) $P(x,y)=2\,y$, $Q(x,y)=x$

(*e*) $P(x,y)=x$, $Q(x,y)=y$

(*f*) $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=x$

8.- Evaluar $\displaystyle\int_\Gamma (2\,x^3-y^3)\,dx + (x^3+y^3)\,dy$ donde Γ es el círculo unidad. Verificar el teorema de Green.

9.- Verificar el teorema de Green para el campo (P,Q) con $P(x,y)=2\,x^3-y^3$ y $Q(x,y)=x^3+y^3$ y la región anular $a^2\le x^2+y^2\le 4\,a^2$.

10.- Calcular el flujo de los campos $F(x,y)=(y,-x)$ y $G(x,y)=(x,y)$ hacia el exterior del disco unidad $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\}$.

11.- Hallar la integral de la componente normal del campo $(2\,x\,y, -y^2)$ a lo largo de la elipse $x^2/a^2+y^2/b^2=1$, orientada positivamente.

12.- Considérese la función $f(x,y) = -\log\sqrt{x^2+y^2}$, definida en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, y el campo $F = \nabla f$ en Ω. Hallar el flujo de F hacia el exterior del disco de radio 1 centrado en el punto $(2,1)$. ¿Cuál es el flujo de F hacia el exterior del disco unidad de $\mathbb{R}^2$?

13.- Calcular la integral $\displaystyle\int_\Gamma (x^4 - x^3 e^x - y)\,dx + (x - y\arctan y)\,dy$, donde Γ viene dado como sigue: dados los puntos $A = (2,0)$, $B = (1,-1)$ y $C = (0,-1)$ de $\mathbb{R}^2$, Γ es el camino formado por el arco AB de la circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1, y los segmentos orientados BC, CO, OA (O es el origen de coordenadas).

14.- Sea $F(x,y)$ el campo vectorial de coordenadas $(P(x,y), Q(x,y))$ dadas por

$$P = \frac{x-y}{x^2+y^2}, \qquad Q = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

definido en $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Hallar la integral $\displaystyle\int_\Gamma F\,ds$ cuando Γ es la circunferencia unidad en $\mathbb{R}^2$, orientada positivamente. ¿Existe una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $F = \nabla f$ en Ω? ¿Es cierto que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ en Ω?

15.- Calcular el área limitada por cada uno de los siguientes contornos.

(a) La elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

(b) El arco de cicloide $x = R\,(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = R\,(1 - \cos\theta)$, con $0 \le \theta \le 2\pi$, y el eje de abscisas.

(c) La rosa de cuatro pétalos descrita en coordenadas polares por $r = 3\operatorname{sen} 2\theta$.

16.- Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada f' continua en $[0,1]$, tal que $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = 1$, $f'(1) = -1$ y $f(x) > 0$ para $0 < x < 1$. Sea

$$C = \big\{(x, f(x)) : x \in [0,1]\big\} \bigcup \big\{(x, -f(x)) : x \in [0,1]\big\}.$$

(a) Hallar una parametrización γ de C, con la orientación positiva del plano.

(b) Calcular $\displaystyle\int_\gamma y^2\,dx + xy\,dy$.

(c) Demostrar que $\displaystyle\frac{1}{4}\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt$.

17.- Hallar la ecuación del plano tangente a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u,v) = (4\,u, 3\,u^2 + v, v^2 + 5)$ en $(0,1,6)$.

(b) $\Phi(u,v) = (u^2, e^{v^2}, v^2 + 1)$ en $(0,1,1)$.

(c) $\Phi(u,\theta) = (\cosh u\,\cos\theta, \cosh u\,\operatorname{sen}\theta, \operatorname{senh} u)$ en $(0,1,0)$.

(d) $\Phi(u,v) = (u^2+1, v^2+1, u^2+v^2)$ en $\Phi(1,1)$.

18.- Hallar la expresión de la normal unitaria a las superficies parametrizadas:

(a) $\Phi(u,v) = (\cos u\,\operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u\,\operatorname{sen} v, \cos v)$ con $0 \le u \le 2\,\pi$, $0 \le v \le \pi$.

(b) $\Phi(\theta,\varphi) = (4\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi, 2\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi, 3\,\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le 2\,\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

(c) $\Phi(r,\theta) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta, r)$ con $0 \le r \le 5$, $0 \le \theta \le \pi$.

19.- Dada la esfera de centro $(0,0,0)$ y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $(1,1,\sqrt{2})$ considerándola como:

(a) Superficie parametrizada, $\Phi(\theta,\varphi) = (2\,\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi, 2\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi, 2\,\cos\varphi)$ con $0 \le \theta \le 2\,\pi$, $0 \le \varphi \le \pi$.

(b) Superficie de nivel 4 de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

(c) Gráfica de la función $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $(x,y) \in D = \big\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 4\big\}$.