

1.- Sea $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2; 1 \leq y \leq 2\}$ y sea $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x+y} & \text{si } x \geq y, \\ 0 & \text{si } x < y, \end{cases}$$

Demostrar que f es integrable sobre E y calcular su integral.

2.- Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 2; 0 \leq x \leq \sqrt{y}\}$ y sea f la función continua en A dada por $f(x, y) = xe^{-x^2/y}$. Calcular la integral de f sobre A .

3.- Sean $0 < b < a$. Consideramos $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 1$. Calcular la integral de f sobre A . ¿Qué interpretación geométrica tiene dicha integral?

4.- Calcular la integral de $f(x, y) = (x + y)^2$ sobre el triángulo cuyos vértices son $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(2, 2)$.

5.- Se considera la pirámide limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$. Dibujarla y expresar su volumen mediante una integral triple. Calcular la integral y comprobar que su valor coincide con el volumen obtenido por la fórmula elemental de la geometría euclídea.

6.- En cada uno de los siguientes apartados, se supone que f es una función integrable sobre una región Ω y que su integral sobre Ω coincide con la integral iterada que se da. En cada caso, se pide identificar y dibujar la región Ω e invertir el orden de integración:

$$(a) \int_0^2 \left(\int_{y^2}^{2y} f(x, y) dx \right) dy.$$

$$(b) \int_1^4 \left(\int_{\sqrt{x}}^2 f(x, y) dy \right) dx.$$

$$(c) \int_1^e \left(\int_0^{\log x} f(x, y) dy \right) dx.$$

$$(d) \int_0^{\pi/2} \left(\int_{-\sin x}^{\cos x} f(x, y) dy \right) dx.$$

7.- Hallar el valor de la integral

$$\int_{\Omega} e^{(y-x)/(y+x)} dx dy,$$

donde Ω es el triángulo determinado por la recta $x + y = 2$ y los dos ejes coordenados. Utilícese un cambio lineal de variables.

8.- Sea $a > 0$. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano $z = 0$, la superficie $x^2 + y^2 = az$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$.

9.- Sea $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ y sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}.$$

Calcular la integral de f sobre B .

10.- Sea $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$ y sea $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Calcular la integral de f sobre B .

- 11.- Sea $a > 0$. Calcular el volumen limitado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ay$ (Cúpula de Viviani).
- 12.- Calcular el volumen encerrado por el plano $z = 0$, los cilindros $x^2 + y^2 = 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ y la superficie $z = xy$.
- 13.- Calcular el volumen limitado por los cilindros $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$.
- 14.- Calcular el volumen limitado por la superficie $z = 2x^2 + y^2 + 1$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x + y = 1$.
- 15.- Consideramos la aplicación definida por

$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = v - u^2. \end{cases}$$

- (a) Calcular su Jacobiano $J(u, v)$.
- (b) Calcular la imagen Ω mediante esta transformación del triángulo T de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$.
- (c) Calcular $\int_{\Omega} \frac{1}{(x - y + 1)^2} dx dy$.
- 16.- Demostrar la igualdad

$$\int_{\Omega} f(xy) dx dy = \log 2 \int_1^2 f(u) du,$$

siendo Ω la región del primer cuadrante limitada por las curvas

$$xy = 1, \quad xy = 2, \quad \frac{y}{x} = 1, \quad \frac{y}{x} = 4.$$

- 17.- Sea $\mathbb{D} = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 1\}$. Sea $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\varphi(s, t) = (s + t, s - t, s)$. Calcular el área de $\varphi(\mathbb{D})$.
- 18.- Calcular el área del helicoides, que es la superficie parametrizada por $\psi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$ para $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi n$, donde n es un entero positivo.
- 19.- Se perfora un agujero cilíndrico de radio b a través de una bola de radio $a > b$ para formar un anillo. Calcular la superficie exterior del anillo.
- 20.- Encontrar el área de la porción del paraboloides $z = 9 - x^2 - y^2$ que está sobre el plano xy .
- 21.- Encontrar el área de la porción del paraboloides $z = 2x^2 + 2y^2$ cortada por los planos $z = 2$ y $z = 8$.
- 22.- Calcular el centro de masas del tetraedro cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ y $(0, 0, 3)$.
- 23.- Calcular el centro de masas del tetraedro del problema anterior suponiendo que la densidad en cada punto (x, y, z) del tetraedro viene dada por $\rho(x, y, z) = x + y + z + 1$.
- 24.- Calcular el centro de masas de un cono circular recto de radio a y altura h .
- 25.- Sea W el sólido limitado por el cono $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ y el plano $z = 4$. Suponiendo que la densidad del material del que está hecho W varía como $\rho(x, y, z) = 5 - z$, calcular el momento de inercia de W alrededor del eje z .