1.- Hallar una ecuación del plano

(a) perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ que pasa por el punto $(1, 0, 0)$;

(b) perpendicular a $\mathbf{v} = (1, 2, 3)$ que pasa por el punto $(1, 1, 1)$;

(c) perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (5, 0, 2)t + (3, -1, 1)$ que pasa por el punto $(5, -1, 0)$;

(d) perpendicular a la recta $\mathbf{l}(t) = (-1, -2, 3)t + (0, 7, 1)$ que pasa por el punto $(2, 4, -1)$.

2.- Hallar la ecuación del plano que pasa por

(a) $(0, 0, 0)$, $(2, 0, -1)$ y $(0, 4, -3)$;

(b) $(1, 2, 0)$, $(0, 1, -2)$ y $(4, 0, 1)$;

(c) $(2, -1, 3)$, $(0, 0, 5)$ y $(5, 7, -1)$;

3.- Hallar la recta intersección de los planos

(a) $x + 2y + z = 0$ y $x - 3y - z = 0$;

(b) $x + (y - 1) + z = 0$ y $-x + (y - 1) - z = 0$;

(c) $2x - y - z = 3$ y $5x + 2y - 3z = 8$.

4.- Hallar la ecuación del plano que contiene las rectas (paralelas)

$$\mathbf{v}_1(t) = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1) \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v}_2(t) = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1).$$

5.- Calcular la distancia del punto $2, 1, -1)$ al plano $x - 2y + 2z + 5 = 0$.

6.- Hallar una ecuación del plano que contiene la recta $\mathbf{v}(t) = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ y es perpendicular al plano $2x + y - 3z + 4 = 0$.

7.- Hallar una ecuación del plano que pasa por $(3, 2, -1)$ y por $(1, -1, 2)$, y es paralelo a la recta $\mathbf{v}(t) = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$.

8.- Calcular la distancia del plano $12x + 13y + 5z + 2 = 0$ al punto $(1, 1, -5)$.

9.- Calcular la distancia del punto $(1, 5, 2)$ a la recta que pasa por $(2, 2, 1)$ y tiene la dirección del vector $\mathbf{v} = (0, 3, 1)$.

10.- Calcular la distancia entre las rectas $\mathbf{v}(t) = (1, 2, -1) + t(1, 1, 1)$ y $\mathbf{w}(t) = (5, 0, 0) + t(0, -1, 1)$.

11.- Demostrar que el plano que pasa por los puntos (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) y (c_1, c_2, c_3) está formado por los puntos (x, y, z) que verifican

$$\begin{vmatrix} a_1 - x & a_2 - y & a_3 - z \\ b_1 - x & b_2 - y & b_3 - z \\ c_1 - x & c_2 - y & c_3 - z \end{vmatrix} = 0.$$

12.- Dibujar las curvas de nivel y la gráfica de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x, y) = x - y + 2$ (b) $f(x, y) = x^2 + 4\,y^2$ (c) $f(x, y) = -x\,y$

(d) $f(x, y) = 1 - (x^2 + y^2)$ (e) $f(x, y) = (1 - (x^2 + y^2))^{\frac{1}{2}}$ (f) $f(x, y) = x^3 - x$

(g) $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + y^2}$ (h) $f(x, y) = \text{máx}\left\{|x|, |y|\right\}$ (i) $f(x, y) = \operatorname{sen}^2(x^2 + y^2)$

13.- Dibujar las superficies de nivel de las siguientes funciones $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) $f(x, y, z) = x - y - z + 2$. (b) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$.

(c) $f(x, y, z) = y\,(x + z)$. (d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$.

(e) $f(x, y, z) = \cos((x^2 + y^2) - z)$. (f) $f(x, y, z) = x - y$.

(g) $f(x, y, z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$. (h) $f(x, y, z) = -\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} - z$.

14.- Hallar todos los valores de a y b para los que los vectores $x = (4, b, 1)$ e $y = (a, b, 0)$ de $\mathbb{R}^3$, son ortogonales. ¿Cuál es el lugar geométrico del plano determinado por tales a y b?

15.- Hallar un vector de $\mathbb{R}^4$ perpendicular a $(1, 2, 1, 1)$, $(-2, 1, 0, 0)$ y $(3, 0, 1, -1)$.

16.- Hallar dos vectores de $\mathbb{R}^4$, perpendiculares a $(3, 2, 0, -2)$, $(1, 4, 2, 0)$ y $(2, -2, -2, -2)$, que sean perpendiculares entre sí.

17.- Demostrar que para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ se cumple

(a) $2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$, (ley del paralelogramo).

(b) $\|x - y\| \cdot \|x + y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$.

(c) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x + y\| = \|x - y\|$.

(d) $\langle x, y\rangle = 0$ si y sólo si $\|x + \lambda\, y\| \geq \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

(e) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x - y\|$.

Interpretar dichos resultados geométricamente en términos del paralelogramo formado por los vectores x e y.

18.- Para cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, determinar si son abiertos, si son cerrados y su frontera.

$A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq x\big\}$, $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3\,x^2 + 2\,y^2 < 6\big\}$,

$C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1\big\}$, $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x\,y > 1\big\}$,

$E = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 4,\ y < x^2\big\}$, $F = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 1)\,(4 - x^2 - y^2) > 0\big\}$,

$G = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1\big\}$, $H = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0\big\}$.

19.- Calcular el cierre, el interior y la frontera de los siguientes conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\Big\}, \\ B &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\big\}, \\ C &= \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 < 1\big\}. \end{aligned}$$

20.- (a) Demostrar que la intersección de dos abiertos es un abierto.

(b) Demostrar que la unión arbitraria de abiertos es abierta.

21.- (a) Demostrar que la unión finita de dos cerrados es un cerrado.

(b) Demostrar que la intersección cualquiera de cerrados es un cerrado.