

Normal multidimensional

Datos:

- dimensión n ;
- vector (columna) $\mathbf{m}$;
- matriz V de dimensiones $n \times n$ simétrica y definida positiva.

Función de densidad (conjunta):

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(V)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^t V^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})}$$

(aquí, $\mathbf{x}$ es un vector columna de $\mathbb{R}^n$).

1. Normal multidimensional estándar

Lema 1

Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$ entonces las componentes X_j de $\mathbb{X}$ son variables normales estándar (unidimensionales) **independientes**. Por tanto,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Cov}(\mathbb{X}) = I.$$

Demostración. Se sigue de que, en este caso,

$$f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x}^t \cdot \mathbf{x}} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j^2} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_j^2} \right).$$

2. Cambio de escala

Lema 2

Sea $\mathbb{X}$ un vector normal aleatorio $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$, sea B una matriz $n \times n$ no singular y sea $\mathbb{Z}$ el vector aleatorio dado por

$$\mathbb{Z} = B\mathbb{X}.$$

Entonces $\mathbb{Z} \sim \mathcal{N}(B\mathbf{m}, BVB^t)$.

Demostración. Como

$$\mathbb{Z} - B\mathbf{m} = B(\mathbb{X} - \mathbf{m}),$$

podemos suponer que $\mathbf{m} = 0$.

Si $\mathbf{z} = B\mathbf{x}$, entonces

$$f_{\mathbb{Z}}(\mathbf{z}) |\det B| = f_{\mathbb{X}}(\mathbf{x}),$$

es decir,

$$\begin{aligned} f_{\mathbb{Z}}(\mathbf{z}) &= \frac{1}{|\det B|} f_{\mathbb{X}}(B^{-1}\mathbf{z}) \\ &= \frac{1}{|\det B|} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(V)}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^t (B^{-1})^t V^{-1} B^{-1} \mathbf{z}} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{\det(W)}} e^{-\frac{1}{2}\mathbf{z}^t W^{-1} \mathbf{z}}. \end{aligned}$$

donde $W = BVB^t$. □

3. Tipificación

Corolario 3

Sea $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$. Sea U tal que $UU^t = V$ (esto es, U^{-1} es raíz cuadrada de V^{-1}). Entonces

$$\mathbb{X} = \mathbf{m} + U\mathbb{Y},$$

donde $\mathbb{Y}$ es normal estándar: $\mathbb{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$.

Demostración. Sea $\mathbb{Y} = U^{-1}(\mathbb{X} - \mathbf{m})$. Por el lema 2 se tiene que

$$\mathbb{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, U^{-1} \cdot V \cdot (U^{-1})^t) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$$

4. Las componentes de una normal multidimensional

Teorema 4

Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$, entonces cada una de las variables X_j componentes de $\mathbb{X}$ es una variable normal. De hecho,

$$\mathbf{E}(\mathbb{X}) = \mathbf{m} \quad \text{y} \quad \mathbf{Cov}(\mathbb{X}) = V.$$

De manera que

$$X_j \sim \mathcal{N}(m_j, V_{jj}), \quad 1 \leq j \leq n$$

y

$$\mathbf{Cov}(X_i, X_j) = V_{ij}, \quad i \neq j.$$

Demostración. Escribimos $V = UU^t$. Usando

$$\mathbb{X} = \mathbf{m} + U\mathbb{Y},$$

tenemos que, para $1 \leq j \leq n$,

$$X_j = m_j + \sum_{k=1}^n U_{jk} Y_k.$$

Así que, como las Y_k son normales independientes, entonces X_j es normal y, además,

$$\mathbf{E}(X_j) = m_j \quad \text{y} \quad \mathbf{V}(X_j) = \sum_{k=1}^n U_{jk}^2 = V_{jj}.$$

Para la covarianza:

$$\begin{aligned}\mathbf{Cov}(X_i, X_j) &= \mathbf{E}(X_i \cdot X_j) - \mathbf{E}(X_i) \cdot \mathbf{E}(X_j) = \mathbf{E}(X_i \cdot X_j) - m_i \cdot m_j \\ &= m_i \cdot m_j + \sum_{k=1}^n U_{ik} U_{jk} - m_i \cdot m_j = V_{ij},\end{aligned}$$

recordando que $V = UU^t$.

(Basta escribir

$$\begin{aligned}X_i &= m_i + U_{i1} Y_1 + U_{i2} Y_2 + \cdots + U_{in} Y_n \\ X_j &= m_j + U_{j1} Y_1 + U_{j2} Y_2 + \cdots + U_{jn} Y_n,\end{aligned}$$

multiplicar y tomar medias).

5. Combinaciones lineales

Proposición 5

Si $\mathbb{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{m}, V)$ y si $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^t \in \mathbb{R}^n$ es un vector no nulo, entonces

$$Z = \mathbf{a}^t \mathbb{X} = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_n X_n$$

es una variable normal con esperanza

$$\mathbf{E}\left(\sum_{j=1}^n a_j X_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j m_j = \mathbf{a}^t \mathbf{m},$$

y varianza

$$\mathbf{V}\left(\sum_{j=1}^n a_j X_j\right) = \sum_{j=1}^n a_j^2 V_{jj} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i a_j V_{ij} = \mathbf{a}^t V \mathbf{a}.$$

Dos observaciones:

- No es cierto que las combinaciones lineales de variables normales (definidas en un mismo espacio de probabilidad, por supuesto) hayan de ser normales.

Ejemplo: X es normal estándar e $Y = -X$. Entonces Y también es normal estándar, pero la suma $X + Y \equiv 0$ no es una variable normal.

- No es cierto que si X e Y son variables normales en un espacio, entonces (X, Y) sea un vector normal aleatorio.

Ejercicio: normal bidimensional

Pongamos que $\mathbf{m} = (0, 0)$ y que V es

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$$

(varianzas 1 y correlación ρ).

Comprobar que

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{1}{1-\rho^2} (x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right).$$

Escribir la fórmula correspondiente para normales no estándar.

La χ_n^2 con n grados de libertad

Definición 6

Decimos que Z es una variable χ^2 con n grados de libertad (escribimos $Z \sim \chi_n^2$) si

$$Z = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2.$$

donde $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables normales estándar independientes.

Obsérvese que

- $\mathbf{E}(Z) = n$;
- $\mathbf{V}(Z) = 2n$.

Si X es normal estándar, $\mathbf{E}(X) = 0$, $V(X) = \mathbf{E}(X^2) = 1$ y $\mathbf{E}(X^4) = 3$.

Dos formas de calcular la varianza:

1) Aprovechando que Z es suma de independientes:

$$\mathbf{V}(Z) = n V(X^2) = n (E(X^4) - E(X^2)^2) = 2n.$$

2) Usando que $\mathbf{V}(Z) = \mathbf{E}(Z^2) - \mathbf{E}(Z)^2$ y calculando

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Z^2) &= \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(X_j^4) + \sum_{i \neq j} \mathbf{E}(X_i^2) \cdot \mathbf{E}(X_j^2) \\ &= n\mathbf{E}(X^4) + n(n-1)\mathbf{E}(X^2)^2 = 3n + n(n-1) = n(n+2)\end{aligned}$$

Función de densidad de la χ_n^2

La función de densidad de $Z \sim \chi^2(n)$ viene dada por

$$f_Z(t) = c_n t^{n/2-1} e^{-t/2} = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2^{n/2}} t^{n/2-1} e^{-t/2} \quad \text{para } t > 0.$$

El valor de c_n sale de exigir que

$$\int_0^\infty f_Z(t) dt = 1.$$

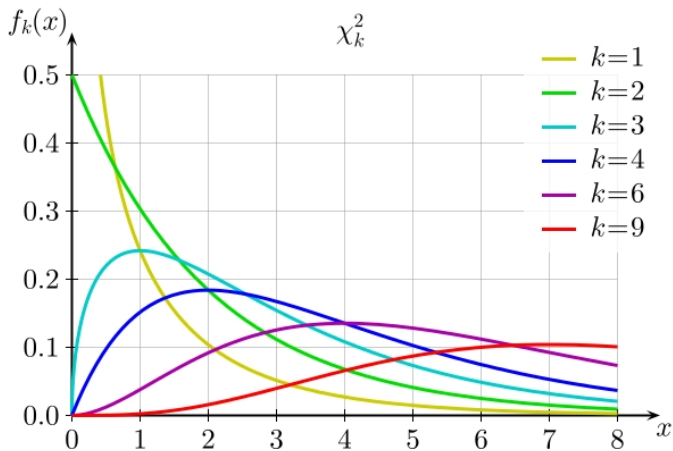
Función Gamma de Euler

La función $\Gamma(x)$ está definida para $x > 0$ por la integral

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Algunas propiedades de la función Γ :

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, para cada $x > 0$;
- $\Gamma(n) = (n-1)!$ si n entero positivo;
- $\Gamma(1) = 1$;
- $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.
- $2^x \Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t/2} dt$.



Lema 7

Si $Z \sim \chi_n^2$, entonces, para $n > 2$,

$$\mathbf{E}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{n-2}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(\frac{1}{Z}\right) &= \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2^{n/2}} \int_0^\infty \frac{1}{t} t^{n/2-1} e^{-t/2} dt \\&= \frac{1}{\Gamma(n/2)} \frac{1}{2^{n/2}} \int_0^\infty t^{(n-2)/2-1} e^{-t/2} dt \\&= \frac{\Gamma(n/2-1) 2^{n/2-1}}{\Gamma(n/2) 2^{n/2}} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n/2-1)}{(n/2-1)\Gamma(n/2-1)} = \frac{1}{n-2}.\end{aligned}$$

Ejercicio. Para $n > 4$, $\mathbf{E}\left(\frac{1}{Z^2}\right) = \frac{1}{(n-2)(n-4)}.$

La distribución $F_{m,n}$

Distribución F de Fisher–Snedecor con m y n grados de libertad: para enteros $m, n \geq 1$, la variable Z sigue una $F_{m,n}$ si

$$Z = \frac{\frac{1}{n}(X_1^2 + \cdots + X_n^2)}{\frac{1}{m}(Y_1^2 + \cdots + Y_m^2)}$$

donde $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_m$ son normales estándar (completamente) independientes.

Obsérvese que

$$Z = \frac{U_n/n}{V_m/m}$$

donde U_n y V_m son **independientes** y $U_n \sim \chi_n^2$ y $V_m \sim \chi_m^2$.

- Si $m \geq 3$, la esperanza de Z es

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{m}{m-2}.$$

- Si $m \geq 5$ entonces

$$\mathbf{V}(Z) = \frac{2(m+n-2)m^2}{n(m-4)(m-2)^2}.$$

Distribución (conjunta) de $\bar{X}$ y S^2 cuando X es normal

Sean $X_1, \dots, X_n$ clones de una variable X .

Recordamos que

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

En general,

- sobre la distribución de $\bar{X}$ tenemos “buena” información (distribución exacta en algunos casos, o TCL cuando n es grande);
- mucha menos sobre la distribución de S^2 ;
- $\bar{X}$ y S^2 no tiene por qué ser independientes.

Pero...

Teorema 8 (Fisher-Cochran)

Si X es normal $\sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces

- 1 $\bar{X}$ es asimismo normal: $\bar{X}$ es $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/n)$;
- 2 $(n-1)S^2/\sigma^2$ es χ^2_{n-1} ;
- 3 $\bar{X}$ y S^2 son variables aleatorias **independientes**.

Dos observaciones previas:

- El apartado 1) ya era conocido. Como

$$\mathbf{E}(\bar{X}) = \mathbf{E}(X) \quad \text{y} \quad \mathbf{V}(\bar{X}) = \frac{\mathbf{V}(X)}{n},$$

este apartado simplemente afirma que $\bar{X}$ es una variable normal.

- Sea Y la variable normal estándar $Y = (X - \mu)/\sigma$. Obsérvese que

$$\bar{Y} = (\bar{X} - \mu)/\sigma \quad \text{y que} \quad (n-1)S_Y^2 = (n-1)S_X^2/\sigma^2.$$

Así que podemos suponer que X es una normal estándar.

Sea $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Sea A una matriz $n \times n$ ortogonal, cuya primera fila es

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \cdots \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

Esta fila es un vector de $\mathbb{R}^n$ de módulo 1. El resto de las filas de la matriz A se pueden obtener por ortonormalización de Gram–Schmidt de la base formada por esa primera fila y $n - 1$ vectores de la base canónica.

Sea $\mathbb{Z}$ el vector columna aleatorio dado por

$$\mathbb{Z} = A\mathbb{X}.$$

Lema 9

Si $\mathbb{Y}$ es normal (multidimensional) estándar y si O es una matriz ortogonal, entonces $\mathbb{Z} = O\mathbb{Y}$ es, asimismo, normal (multidimensional) estándar.

Demostración. El vector $\mathbb{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, I)$. Como O es ortogonal, $OO^t = I$. El lema 2 nos dice que

$$\mathbb{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, OIO^t) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, OO^t) = \mathcal{N}(\mathbf{0}, I).$$

Como A es ortogonal, $\mathbb{Z} = A\mathbb{X}$ es un vector normal estándar: sus componentes

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

son normales estándar independientes.

Obsérvese que $Z_1 = \sqrt{n} \bar{X}$. De manera que

$$\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{n}} Z_1$$

es $\mathcal{N}(0, 1/n)$.

Usando de nuevo que A es ortogonal,

$$\mathbb{Z}^t \cdot \mathbb{Z} = \mathbb{X}^t A^t A \mathbb{X} = \mathbb{X}^t \cdot \mathbb{X},$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Recuérdese que, en general,

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2.$$

De manera que

$$(n-1)S^2 = \sum_{i=1}^n Z_i^2 - Z_1^2 = \sum_{i=2}^n Z_i^2.$$

Conclusión:

- $(n-1)S^2$ es una χ_{n-1}^2 ;
- $\bar{X}$ y S^2 son independientes.

La distribución t de Student

Una variable T_n sigue una **distribución t de Student con n grados de libertad**, $T_n \sim \text{STU}(n)$, si

$$T_n = \frac{Y}{\sqrt{Z_n/n}},$$

donde Y es una normal estándar, Z_n sigue una distribución χ_n^2 , e Y y Z_n son independientes.

Proposición 10

Si X es una variable normal $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ entonces

$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}$ es una t de Student con $n - 1$ grados de libertad

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ entonces, $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = Y$ es normal estándar.
- $(n - 1)S^2/\sigma^2 = Z_{n-1}$ es una χ^2_{n-1} ,
- Además, Y y Z_{n-1} son independientes.

Así que

$$\frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{S/\sigma} = \frac{Y}{\sqrt{Z_{n-1}/(n-1)}}$$

es una variable t de Student con $n - 1$ grados de libertad.

Sea

$$T_n = \frac{Y}{\sqrt{Z_n/n}} \sim \text{STU}(n).$$

Esperanza de T_n : como numerador y denominador son independientes y $\mathbf{E}(Y) = 0$ tenemos que

$$\mathbf{E}(T_n) = 0.$$

Varianza de T_n : para $n > 2$,

$$\mathbf{V}(T_n) = \mathbf{E}(T_n^2) = n \mathbf{E}(Y^2) \mathbf{E}(1/Z_n) = n \mathbf{E}(1/Z_n) = \frac{n}{n-2}.$$

Función de densidad:

$$f_{T_n}(t) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \left(\frac{1}{1+t^2/n} \right)^{(n+1)/2}.$$

