

Probabilidad II
Tercero de Matemáticas UAM, curso 2007-2008
Solucionario del examen parcial, 14-4-2008

1. Tenemos unas variables $X_1, X_2, \dots$ i.i.d., uniformes en el conjunto $[0, 1] \cup [2, 3]$.

(a) Calcula $\mathbf{V}(X_3)$.

SOLUCIÓN. La media de una variable X cualquiera es, claramente, 1.5. Pero bueno, comprobémoslo. La función de densidad es

$$f_X(x) = \frac{1}{2} [\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{[2,3]}(x)] \quad (\text{obsérvese que } \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = 1)$$

Así que

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 x dx + \int_2^3 x dx \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^1 + \frac{x^2}{2} \Big|_2^3 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{9-4}{2} \right] = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

como decíamos antes. Calculamos ahora

$$\mathbf{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \frac{1}{2} \left[\int_0^1 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + \frac{x^3}{3} \Big|_2^3 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} + \frac{27-8}{3} \right] = \frac{10}{3}.$$

Finalmente,

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{10}{3} - \frac{9}{4} = \frac{40-27}{12} = \frac{13}{12}$$

(b) (Grupo de mañana) Considera la variable

$$Z = \max(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

Calcula $\mathbf{P}(Z > 3/2)$

SOLUCIÓN.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(Z \leq 3/2) &= \mathbf{P}(\max(X_1, X_2, X_3, X_4) \leq 3/2) = \mathbf{P}(X_1 \leq 3/2, X_2 \leq 3/2, X_3 \leq 3/2, X_4 \leq 3/2) \\ &\stackrel{\text{i.i.d.}}{=} \mathbf{P}(X \leq 3/2)^4 = \mathbf{P}(X \leq 1)^4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

Así que $\mathbf{P}(Z > 3/2) = 1 - (1/2)^4$.

(b) (Grupo de tarde) Considera la variable

$$Z = \max(X_1, X_3, X_5, X_7, X_9).$$

Calcula $\mathbf{P}(Z > 3/2)$.

SOLUCIÓN. El mismo argumento da $\mathbf{P}(Z > 3/2) = 1 - (1/2)^5$.

(c) (Grupo de mañana) Ahora las variables X_i , que siguen siendo i.i.d., son uniformes en $[0, 1]$. Considera la variable aleatoria

$$Z = \min(\max(X_1, X_2), \max(X_3, X_4)).$$

Calcula $\mathbf{P}(Z > 1/2)$.

SOLUCIÓN.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z > 1/2) &= \mathbf{P}(\min(\max(X_1, X_2), \max(X_3, X_4)) > 1/2) = \mathbf{P}(\max(X_1, X_2) > 1/2, \max(X_3, X_4) > 1/2) \\ &\stackrel{\text{i.i.d.}}{=} \mathbf{P}(\max(X_1, X_2) > 1/2)^2 = [1 - \mathbf{P}(\max(X_1, X_2) \leq 1/2)]^2 = [1 - \mathbf{P}(X \leq 1/2)^2]^2 = [1 - 1/4]^2 = \frac{9}{16}\end{aligned}$$

(c) (Grupo de tarde) Ahora las variables X_i , que siguen siendo i.i.d, son uniformes en $[0, 1]$. Considera la variable aleatoria

$$Z = \max(\min(X_1, X_2), \min(X_3, X_4)).$$

Calcula $\mathbf{P}(Z > 1/2)$.

SOLUCIÓN.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z \leq 1/2) &= \mathbf{P}(\max(\min(X_1, X_2), \min(X_3, X_4)) \leq 1/2) = \mathbf{P}(\min(X_1, X_2) \leq 1/2, \min(X_3, X_4) \leq 1/2) \\ &\stackrel{\text{i.i.d.}}{=} \mathbf{P}(\min(X_1, X_2) \leq 1/2)^2 = [1 - \mathbf{P}(\min(X_1, X_2) > 1/2)]^2 = [1 - \mathbf{P}(X > 1/2)^2]^2 = [1 - 1/4]^2 = \frac{9}{16}\end{aligned}$$

Y, por tanto, $\mathbf{P}(Z > 1/2) = 1 - 9/16 = 7/16$.

2. (Grupo de mañana) Vamos a ir apostando al resultado de una moneda que sale cara con probabilidad p . En cada jugada, ganamos 1 euro o perdemos 1 euro dependiendo de si hemos acertado o no lo que sale en la moneda. En las jugadas “impares (1, 3, 5, ...)” apostamos a que sale cara, y en las jugadas “pares” (2, 4, 6, ...) a que sale cruz. Llamemos P_n al dinero que hemos ganado (o perdido) tras n lanzamientos de la moneda. Prueba que

$$\frac{P_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

y determina el valor de μ .

SOLUCIÓN. Llamamos X_j a la ganancia o pérdida en el lanzamiento j . Las X_j toman valores ± 1 , pero con probabilidad p de $+1$ si j es par y $1 - p$ si j impar. Así que si escribimos P_n como $\sum_{j=1}^n X_j$, se trata de una suma de variables independientes, pero no idénticas.

Otra opción es considerar unas variables Y_j (éstas sí, idénticas) que toman valores ± 1 (con probabilidad p de $+1$), y escribir P_n como $\sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} Y_j$. Pero ahora P_n no es una *suma* de variables i.i.d.

Hay varias formas de sortear estas dificultades:

- En la versión con las X_j (que tienen media $\mathbf{E}(X_j) = 1 - 2p$ si j par y $2p - 1$ si j impar; mientras que la varianza es siempre 1), podemos escribir

$$\frac{P_{2n}}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2n} X_j = \frac{2}{2n} \left[\frac{X_1 + X_2}{2} + \frac{X_3 + X_4}{2} + \cdots + \frac{X_{2n-1} + X_{2n}}{2} \right] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j,$$

donde las Z_j ya son i.i.d. con media 0 (y una cierta varianza finita). La ley débil nos da entonces la conclusión (bueno, si el índice no es par, entonces “sobra” una variable en la suma, y hay que observar que esa contribución se hace pequeña con n).

- También podríamos aplicar directamente la versión de la ley débil en la que las variables no eran idénticas pero los promedios de las medias de las variables tendían a un cierto número (0, en este caso).
- O, en cualquiera de las dos versiones (con las X_j o las Y_j), calcular directamente la media de P_n (que es 0, salvo la pequeña corrección si n no es par, pero que se hace tan pequeña como queramos si n es suficientemente grande) y su varianza, y aplicar la desigualdad de Chebyshev.)

2. (Grupo de tarde) Vamos a ir apostando al resultado de una moneda M_1 que sale cara con probabilidad p . En cada jugada,

- lanzamos primero una moneda regular M_2 , que nos dice si apostaremos a cara o a cruz en el siguiente paso.
- Lanzamos la moneda M_1 . Si en el primer paso ha salido cara, ganamos 1 euro si en M_1 sale cara (y perdemos 1 euro si sale cruz). Si ha salido cruz en la moneda M_2 , entonces ganamos 1 euros si en M_1 sale cruz y perdemos 1 euro si sale cara.

Llamemos P_n al dinero que hemos ganado (o perdido) tras n lanzamientos de la moneda. Prueba que

$$\frac{P_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty,$$

y determina el valor de μ .

SOLUCIÓN. Si consideramos unas variables ε_j que toman valores ± 1 con probabilidad $1/2$ (que recogen nuestra apuesta) y unas variables X_j que también toman valores ± 1 , pero ahora con probabilidad p de $+1$ (éstas recogen si sale cara o cruz en M_1), entonces la ganancia o pérdida en la partida j se puede escribir como $Z_j = \varepsilon_j X_j$, que es una variable de media 0 (pues $\mathbf{E}(Z_j) = \mathbf{E}(\varepsilon_j X_j) = \mathbf{E}(\varepsilon_j) \mathbf{E}(X_j) = 0$, por la independencia) y una cierta varianza finita ($\mathbf{V}(Z_j) = \mathbf{E}(Z_j^2) = \mathbf{E}(\varepsilon_j^2 X_j^2) = \mathbf{E}(\varepsilon_j^2) \mathbf{E}(X_j^2) = 1 \times 1 = 1$, de nuevo por la independencia). Así, P_n es una suma de variables i.i.d. y la ley débil nos permite concluir el resultado.

Alternativamente, si llamamos Z_j a la ganancia o pérdida en la partida j , condicionando adecuadamente o enumerando los casos, podemos descubrir que Z_j toma valores ± 1 con probabilidad $1/2$. Por tanto tiene media 0 y varianza 1. De nuevo aplicamos la ley débil para concluir.

3. Considera la sucesión de variables i.i.d. (X_j) . Estas variables toman los valores $+1$ y -1 con probabilidad $1/2$. Sea ahora la siguiente variable aleatoria:

$$H_n = 2^1 X_1 + 2^2 X_2 + \cdots + 2^n X_n.$$

(a) Comprueba que, para todo $\varepsilon > 0$ y si $\alpha > 1$, $\mathbf{P}\left(\left|\frac{H_n}{2^{\alpha n}}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

SOLUCIÓN. Cada X_j tiene media 0 y varianza 1. Así que la variable $H_n = \sum_{j=1}^n 2^j X_j$ tiene $\mathbf{E}(H_n) = 0$ y

$$\mathbf{V}(H_n) = \mathbf{V}\left(\sum_{j=1}^n 2^j X_j\right) = \sum_{j=1}^n 2^{2j} \mathbf{V}(X_1) = \sum_{j=1}^n 2^{2j} = \frac{2^{2(n+1)} - 2^2}{3}$$

(el valor preciso no es tan importante, sólo que es del orden de 2^{2n}). Entonces, utilizando la desigualdad de Chebyshev,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{H_n}{2^{\alpha n}}\right| > \varepsilon\right) = \mathbf{P}(|H_n| > \varepsilon 2^{\alpha n}) \leq \frac{\mathbf{V}(H_n)}{\varepsilon^2 2^{2\alpha n}}$$

que tiende a 0 cuando $n \rightarrow \infty$, pues $\alpha > 1$.

(b) ¿Qué pasa si $\alpha = 1$?

SOLUCIÓN. En este caso, la desigualdad de Chebyshev no nos proporciona información útil para ε pequeño. Pero en realidad es que $\mathbf{P}(|H_n| > \varepsilon 2^n)$ no puede tender a 0 cuando $n \rightarrow \infty$ para todo $\varepsilon > 0$. Argumentemos, por ejemplo, de la siguiente forma: con probabilidad $1/4$, los dos últimos lanzamientos son $+1$ y, por tanto,

$$H_n = [2 X_1 + 2^2 X_2 + \cdots + 2^{n-2} X_{n-2}] + \underbrace{2^{n-1} + 2^n}_{=3 \cdot 2^{n-1}}.$$

Lo que va entre corchetes en la expresión anterior está, en valor absoluto, acotado por $2^{n-1} - 2$, así que, con probabilidad al menos $1/4$, $H_n/2^n$ es mayor que, digamos, 1 .