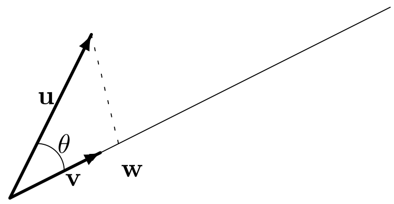
Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2005-2006

Solucionario de (algunos de) los ejercicios del Resumen/Hoja 0 de ejercicios sobre cálculo vectorial en $\mathbb{R}^3$

- ***Proyección de un vector sobre una recta***



Ejercicio 2 *Dados* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$*, comprueba que el vector*

$$\mathbf{w} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\left[\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right]$$

es el vector múltiplo de $\mathbf{v}$ *más cercano a* $\mathbf{u}$*. Deduce que*

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}; \qquad \textit{o bien} \qquad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|\,\cos(\theta), \quad \textit{con } \theta\in[0,\pi).$$

De lo que se obtiene que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ *si y sólo si* $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ *(*$\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *son perpendiculares).*

SOLUCIÓN. Todo múltiplo de $\mathbf{v}$ se escribe como $\lambda\mathbf{v}$, donde $\lambda\in\mathbb{R}$. Así que la distancia (al cuadrado) de $\mathbf{u}$ a ese múltiplo es la función

$$f(\lambda) = \|\mathbf{u}-\lambda\mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u}-\lambda\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}-\lambda\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\lambda(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + \lambda^2\|\mathbf{v}\|^2\,.$$

Buscamos el valor de λ para el que esta función tome un valor mínimo. Para ello, resolvemos

$$0 = \frac{df(\lambda)}{d\lambda} = -2(\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}) + 2\lambda\|\mathbf{v}\|^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\,,$$

por lo que (tras comprobar el signo de la segunda derivada), deducimos que el múltiplo de $\mathbf{v}$ más cercano a $\mathbf{u}$ es

$$\mathbf{w} = \left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\right)\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\left[\frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right]$$

- ***Coordenadas de un vector en una base***

Ejercicio 7 *Sea* $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^3$ *y sea* $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ *una base de* $\mathbb{R}^3$*.*

(a) Calcula las coordenadas de $\mathbf{u}$ *en la base* $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ *si la base es 1) ortonormal; 2) ortogonal; 3) arbitraria.*

(b) Si (u_1,u_2,u_3) *son las coordenadas de* $\mathbf{u}$ *en la base* $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$*, calcula* $\|\mathbf{u}\|^2$*.*

(c) Si (u_1,u_2,u_3) *y* (v_1,v_2,v_3) *son, respectivamente, las coordenadas de* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *en la base* $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$*, calcula* $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$*.*

SOLUCIÓN. Como $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$, el vector $\mathbf{u}$ se podrá escribir como

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}\,,$$

donde α, β y γ son justamente las coordenadas que pretendemos calcular. Para ello, podemos escribir los tres siguientes productos escalares:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{u}\cdot\mathbf{a} &=& \alpha\|\mathbf{a}\|^2+\beta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+\gamma(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{b} &=& \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\beta\|\mathbf{b}\|^2+\gamma(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{c} &=& \alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})+\beta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\gamma\|\mathbf{c}\|^2 \end{array}\right.$$

Al resolver este sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas (α, β y γ), cuya forma matricial es

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{c}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\|\mathbf{a}\|^2 & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) & (\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) & \|\mathbf{b}\|^2 & (\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\\ (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) & (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) & \|\mathbf{c}\|^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$$

(obsérvese la simetría de la matriz), obtenemos los valores α, β y γ buscados.

Si la base es ortogonal, la resolución es muy sencilla, pues el sistema es, simplemente,

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathbf{u}\cdot\mathbf{a} &=& \alpha\|\mathbf{a}\|^2 \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{b} &=& \beta\|\mathbf{b}\|^2 \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{c} &=& \gamma\|\mathbf{c}\|^2 \end{array}\right. \implies \alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2}, \quad \beta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|^2}, \quad \gamma = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{c}}{\|\mathbf{c}\|^2}$$

Y, si es ortonormal, entonces

$$\alpha = \mathbf{u}\cdot\mathbf{a}, \qquad \beta = \mathbf{u}\cdot\mathbf{b}, \qquad \gamma = \mathbf{u}\cdot\mathbf{c}.$$

(b) Si (u_1, u_2, u_3) son las coordenadas de $\mathbf{u}$ en la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ calculadas en el apartado anterior, entonces

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|^2 &= \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = (u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} + u_3\mathbf{c})\cdot(u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} + u_3\mathbf{c}) \\ &= u_1^2\|\mathbf{a}\|^2 + u_2^2\|\mathbf{b}\|^2 + u_3^2\|\mathbf{c}\|^2 + 2u_1u_2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + 2u_1u_3(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) + 2u_2u_3(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \end{aligned}$$

En el caso ortogonal, la expresión correspondiente es

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2\|\mathbf{a}\|^2 + u_2^2\|\mathbf{b}\|^2 + u_3^2\|\mathbf{c}\|^2.$$

Y si ortonormal, entonces

$$\|\mathbf{u}\|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

(c) Si ahora (u_1, u_2, u_3) y (v_1, v_2, v_3) son, respectivamente, las coordenadas de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} &= (u_1\mathbf{a} + u_2\mathbf{b} + u_3\mathbf{c})\cdot(v_1\mathbf{a} + v_2\mathbf{b} + v_3\mathbf{c}) \\ &= u_1v_1\|\mathbf{a}\|^2 + u_2v_2\|\mathbf{b}\|^2 + u_3v_3\|\mathbf{c}\|^2 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,[u_1v_2 + u_2v_1] + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,[u_1v_3 + u_3v_1] + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,[u_2v_3 + u_3v_2]. \end{aligned}$$

En los casos ortogonal y ortonormal queda, simplemente,

$$\text{(ortogonal)} \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1\|\mathbf{a}\|^2 + u_2v_2\|\mathbf{b}\|^2 + u_3v_3\|\mathbf{c}\|^2; \qquad \text{(ortonormal)} \quad \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.$$

• *Proyección de un vector sobre un plano*

Ejercicio 8 *Sea $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ y consideremos un plano determinado por dos vectores $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Determina cuál es el vector del plano más cercano a $\mathbf{u}$, y obtén una expresión para la distancia de $\mathbf{u}$ al plano.*

SOLUCIÓN. Buscamos α y β para los que

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= \|\mathbf{u} - \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{u} - \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b})\cdot(\mathbf{u} - \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}) \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + \alpha^2\|\mathbf{a}\|^2 + \beta^2\|\mathbf{b}\|^2 - 2\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) - 2\beta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}) + 2\alpha\beta(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \end{aligned}$$

sea mínima. Al igualar las derivadas parciales a 0, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|\mathbf{a}\|^2 & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \|\mathbf{b}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \implies \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2} \begin{pmatrix} \|\mathbf{b}\|^2 & -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \\ -\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \|\mathbf{a}\|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{u} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

así que

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}\Big[\|\mathbf{b}\|^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\Big] \\ \beta &= \frac{1}{\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}\Big[\|\mathbf{a}\|^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\Big] \end{aligned}$$

El vector del plano más cercano a $\mathbf{u}$ resulta ser $\mathbf{w} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, donde α y β están escritos arriba. Y la distancia de $\mathbf{u}$ al plano es el valor de la función $f(\alpha, \beta)$ en los α y β anteriores.

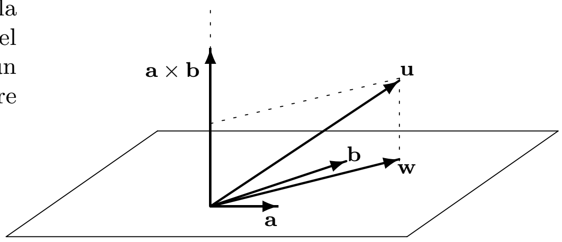
Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son ortogonales y de longitud unidad, entonces el vector del plano más cercano a $\mathbf{u}$ es, simplemente,

$$\mathbf{w} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{a} + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\,\mathbf{b},$$

y la distancia (al cuadrado) de $\mathbf{u}$ al plano viene dada por

$$\|\mathbf{u}\|^2 - \big[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})^2 + (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})^2\big]$$

Una manera alternativa, más geométrica, de abordar la cuestión pasa por considerar el vector $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Véase el dibujo: el vector $\mathbf{u}$ se puede escribir como la suma de un vector en la dirección de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ más otro que está sobre el plano determinado por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$:



$$\mathbf{u} = \alpha\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \mathbf{w}\,,$$

donde el número α viene dado por

$$\alpha = \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2}$$

(véase el ejercicio 2 de esta misma hoja). Así que el vector del plano más cercano a $\mathbf{u}$ es, simplemente,

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} - \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,,$$

y la distancia al plano es

$$\frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2}$$

Si $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son perpendiculares y de norma 1, entonces

$$\text{vector más cercano:} \quad \mathbf{w} = \mathbf{u} - \big[\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})\big]\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})\,; \qquad \text{distancia al plano:} \quad |\mathbf{u} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|\,.$$

Ejercicio 13 *Demuestra que*

$$\Big\| \int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt \Big\| \leq \int_a^b \|\mathbf{u}(t)\|\,dt$$

Solución. Obsérvese que, si $\mathbf{u}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, la desigualdad que pretendemos probar nos dice que

$$\left(\int_a^b x(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b y(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_a^b z(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}\,dt\right)^2,$$

lo que no parece obvio, ni mucho menos.
Empezamos calculando el producto escalar, para un $\mathbf{w}$ fijo,

$$\left(\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt\right) \cdot \mathbf{w} \overset{\text{ejercicio 12}}{=} \int_a^b \big(\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{w}\big)\,dt \leq \int_a^b |\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{w}|\,dt\,.$$

Ahora bien, si $\|\mathbf{w}\| = 1$, entonces, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$|\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{u}(t)\|\,\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}(t)\|\,.$$

De manera que

$$\left(\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt\right) \cdot \mathbf{w} \leq \int_a^b \|\mathbf{u}(t)\|\,dt \qquad \text{si } \|\mathbf{w}\| = 1.$$

Ahora elegimos

$$\mathbf{w} = \frac{\displaystyle\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt}{\displaystyle\Big\| \int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt \Big\|}\,,$$

un vector fijo que tiene norma 1. Y así obtenemos que

$$\left(\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt\right) \cdot \frac{\displaystyle\int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt}{\displaystyle\Big\| \int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt \Big\|} \leq \int_a^b \|\mathbf{u}(t)\|\,dt\,.$$

Pero lo de la izquierda es, simplemente, $\| \int_a^b \mathbf{u}(t)\,dt \|$.