Geometría II
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2004-2005
Solucionario del examen final de septiembre, 3-9-2005

> *Nota bene:* En estas páginas aparecerán las respuestas a los ejercicios del examen, junto con algunas de las distintas maneras de abordarlos (con más detalle del que era estrictamente necesario y con comentarios adicionales).

1. (3 puntos) Contesta brevemente, pero razonando las respuestas, a las siguientes cuestiones:
(a) ¿Es el conjunto de puntos $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - zx + y^2 + 2z = 5\}$ una superficie regular?

Solución. Sólo hay que comprobar si 5 es un valor regular de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^2 - zx + y^2 + 2z$, porque entonces $f^{-1}(\{5\})$, el conjunto de puntos del enunciado, sería una superficie regular. Pero el gradiente de f,

$$\nabla f(x,y,x) = (2x - z, 2y, 2 - x),$$

es el vector $\mathbf{0}$ sólo en el punto $(2,0,4)$. Así que $(2,0,4)$ es el único punto crítico, y $f(2,0,4) = 4$, el único valor crítico. Por lo que el 5 es un valor regular.

(b) Sea S una superficie. Comprueba que en cada punto $\mathbf{p} \in S$ se cumple que $H(\mathbf{p})^2 \geq K(\mathbf{p})$ (H y K son la curvatura media y la gaussiana, respectivamente). ¿Es cierto que, para toda superficie S, $H(\mathbf{p})^2 \geq |K(\mathbf{p})|$ en cada $\mathbf{p} \in S$?

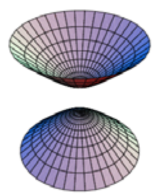
Solución. La primera afirmación se deduce de la siguiente cadena de equivalencias:

$$\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)^2 \geq k_1 k_2 \iff k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2 \geq 4k_1k_2 \iff k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \geq 0 \iff (k_1 - k_2)^2 \geq 0\,.$$

El argumento va de derecha a izquierda: como $(k_1 - k_2)^2 \geq 0$ sean cuales sean k_1 y k_2...
La segunda afirmación no es cierta. Imaginemos, por ejemplo, un punto en una superficie en el que $k_1 = -k_2 \neq 0$. La curvatura media es 0, mientras que $|K| > 0$. Un ejemplo explícito sería la superficie $z = x^2 - y^2$ en el origen.

(c) Parametriza la superficie S dada por $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - z^2 = -1\,.$

Solución.
Hay muchas formas de parametrizar este hiperboloide de dos hojas. Por ejemplo,



$$\mathbb{X}(u,v) = (2\sinh(u)\cos(v), 3\sinh(u)\sin(v), \pm\cosh(u))\,, \qquad \text{con } u > 0 \text{ y } v \in (0, 2\pi),$$

que deja "fuera" un "meridiano". O, más simplemente, como gráfica de una función:

$$\mathbb{X}(x,y) = \left(x, y, \pm\sqrt{1 + \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}}\right), \qquad \text{con } x, y \in \mathbb{R}\,.$$

En ambos casos la elección del signo en la raíz determina si parametrizamos la hoja de "arriba" o la de "abajo".

(d) ¿Existe una superficie regular parametrizada por $\mathbb{X}(u,v)$ con $E(u,v) = 2$, $G(u,v) = 5$ y $F(u,v) = 6$? ¿Y si la parametrización fuera $\mathbb{X}(u,v)$, con $u > 0$, $v \in (0, 2\pi)$ y los coeficientes de la primera y la segunda formas fundamentales fueran

$$E(u,v) = 1\,,\ F(u,v) = 0\,,\ G(u,v) = u \quad \text{y} \quad e(u,v) = u\,,\ f(u,v) = 0\,,\ g(u,v) = v \quad ?$$

Solución. Como la primera forma fundamental es definida positiva, en cada punto ha de verificarse que $EG - F^2 > 0$. En el primer caso,

$$EG - F^2 = 2 \times 5 - 6^2 = -26\,,$$

lo que descarta que haya una superficie con esos coeficientes.
Los coeficientes de la primera forma fundamental en el segundo caso sí cumplen esta condición. Descartamos que haya una superficie con esas características calculando la curvatura gaussiana en un punto cualquiera. Por un lado,

$$K(u,v) = \frac{e(u,v)\,g(u,v) - f(u,v)^2}{E(u,v)\,G(u,v) - F(u,v)^2} = \frac{uv}{u} = v\,.$$

Pero, por otro, la curvatura gaussiana se puede escribir únicamente en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental (y sus derivadas). En nuestro caso, como $F \equiv 0$, podemos aplicar la fórmula

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right],$$

que, como $E(u,v) = 1$ y $G(u,v) = u$, nos lleva a que

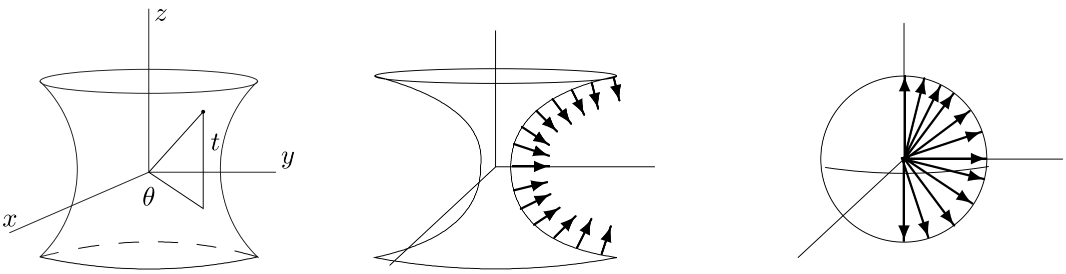
$$K(u,v) = -\frac{1}{2\sqrt{u}}\left[0 + \left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)_u\right] = \frac{1}{4u^2}$$

(e) Consideremos la superficie (la *catenoide*) parametrizada de la siguiente manera:

$$\mathbb{X}(t,\theta) = (\cosh(t)\cos(\theta), \cosh(t)\sin(\theta), t)\,, \qquad t \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)\,.$$

Dibuja la superficie e interpreta geométricamente los parámetros t y θ. Cuando recorremos la curva sobre la catenoide dada por $\theta = \pi/2$, los vectores normales a la superficie describen un arco sobre la esfera unidad. ¿Cuál? Dibújalo.

Solución. El catenoide parametrizado por la aplicación $\mathbb{X}(t,\theta)$ de arriba tiene una forma que se aprecia en los dibujos que se exhiben debajo de estas líneas (más ajustado, quizás, el intermedio). El parámetro t indica la "altura" (coordenada z) del punto, mientras que θ es el ángulo medido desde el eje x. En el dibujo central mostramos los vectores normales a la superficie cuando recorremos el meridiano $\theta = \pi/2$, y en el de la izquierda, esos vectores normales marcados sobre la esfera unidad, recorriendo medio meridiano.



2. (1 punto) (a) Sea $\mathbf{p}$ un punto de una superficie S. ¿Qué sabrías decir sobre $\mathbf{p}$ si
• una de las direcciones principales en $\mathbf{p}$ es también asintótica?
• ¿Y si las dos direcciones principales en $\mathbf{p}$ son asintóticas?

Solución. El que una dirección principal sea también asintótica supone que una de las curvaturas principales, k_1 ó k_2, es 0. Es decir, que $K = k_1 k_2 = 0$. Por lo que $\mathbf{p}$ es un punto parabólico o plano. En el segundo caso, tanto k_1 como k_2 son 0 y el punto es plano.

(b) Supongamos ahora que $\mathbf{p}$ es un punto hiperbólico. Compruébese que existe una dirección en la que la curvatura normal coincide con la curvatura media de la superficie S en $\mathbf{p}$.

Solución. Consideramos en $T_{\mathbf{p}}S$ la base de direcciones principales $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Si consideramos un $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$ de norma 1, la curvatura normal en la dirección $\mathbf{w}$ viene dada por

$$k(\mathbf{w}) = k_1 \cos(\theta)^2 + k_2 \sin(\theta)^2 \,,$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{w}$ y $\mathbf{e}_1$. Así que todo lo que tenemos que hacer es garantizar la existencia de un valor de θ para el que

$$k_1 \cos(\theta)^2 + k_2 \sin(\theta)^2 = \frac{k_1 + k_2}{2} \,.$$

Por ejemplo, $\theta = \pi/4$, o bien $\theta = 3\pi/4$.

3. (2 puntos) Viajamos por el plano, partiendo del origen, siguiendo la traza de una curva $\boldsymbol{\gamma} : [0, 1) \to \mathbb{R}^2$, parametrizada por longitud de arco, que cumple que

- $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0)$; $\boldsymbol{\gamma}'(0) = (0, 1)$;
- su curvatura (con signo) es $\kappa(s) = \dfrac{1}{1 + s^2}$ para cada $s \in [0, 1)$.

¿En qué punto del plano estaremos cuando $s = 1/2$?

Solución. Como $\boldsymbol{\gamma}$ está parametrizada por longitud de arco, sabemos que $\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\| = 1$ para todo s, de manera que podremos escribir las coordenadas de $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ como el coseno y el seno de una cierta función $\theta(s)$ diferenciable. Esta función ha de cumplir que

$$\theta'(s) = \frac{1}{1 + s^2},$$

para que al final $\boldsymbol{\gamma}$ tenga la curvatura apropiada. Lo que supone que

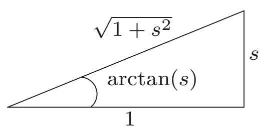
$$\theta(s) = \arctan(s) + C_1$$

y que el vector velocidad sea $\boldsymbol{\gamma}'(s) = (\cos(\arctan(s) + C_1), \sin(\arctan(s) + C_1))$. Pero como $\boldsymbol{\gamma}'(0) = (0, 1)$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \cos(\arctan(0) + C_1) & = & 0 \\ \sin(\arctan(0) + C_1) & = & 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(C_1) & = & 0 \\ \sin(C_1) & = & 1 \end{array} \right.$$

así que podemos tomar la constante C_1 como $\pi/2$ y escribir que

$$\boldsymbol{\gamma}'(s) = \left(\cos\left(\arctan(s) + \frac{\pi}{2} \right), \sin\left(\arctan(s) + \frac{\pi}{2} \right) \right) = (-\sin(\arctan(s)), \cos(\arctan(s))) \,.$$



Un poco de trigonometría (véase el triángulo en el dibujo adjunto) nos permite reescribir el vector velocidad como

$$\boldsymbol{\gamma}'(s) = \left(-\frac{s}{\sqrt{1 + s^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + s^2}} \right)$$

Sólo queda integrar este vector para obtener la curva:

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (-\sqrt{1 + s^2} + C_2, \arcsin(s) + C_3) \,.$$

Como $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0, 0)$, las constantes resultan ser $C_2 = 1$ y $C_3 = 0$. Finalmente,

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = (1 - \sqrt{1 + s^2}, \arcsin(s)) \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$$

4. (2 puntos) De nuevo estamos con la catenoide, que parametrizamos mediante

$$\mathbb{X}(t, \theta) = (\cosh(t) \cos(\theta), \cosh(t) \sin(\theta), t) \,, \qquad \text{con } t \in \mathbb{R} \text{ y } \theta \in (0, 2\pi).$$

a) Dibuja y halla la longitud de la curva $\boldsymbol{\alpha}$ sobre el catenoide que, en coordenadas, viene dada por $t = \theta$, donde $0 < \theta < \pi/2$.

Solución. Hallamos, para empezar, los coeficientes de la primera forma fundamental. Como

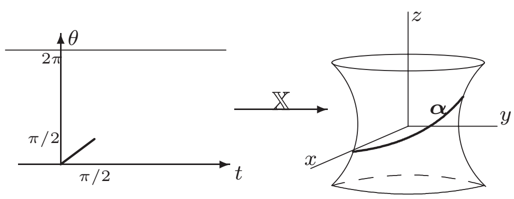
$$\mathbb{X}_t(t,\theta) = (\sinh(t)\cos(\theta), \sinh(t)\sin(\theta), 1)\,,$$
$$\mathbb{X}_\theta(t,\theta) = (-\cosh(t)\sin(\theta), \cosh(t)\cos(\theta), 0)\,,$$

obtenemos que

$$E(t,\theta) = <\mathbb{X}_t, \mathbb{X}_t> = \sinh(t)^2\cos(\theta)^2 + \sinh(t)^2\sin(\theta)^2 + 1 = 1 + \sinh(t)^2 = \cosh(t)^2$$
$$F(t,\theta) = <\mathbb{X}_t, \mathbb{X}_\theta> = -\sinh(t)\cos(\theta)\cosh(t)\sin(\theta) + \sinh(t)\cos(\theta)\cosh(t)\sin(\theta) = 0$$
$$G(t,\theta) = <\mathbb{X}_\theta, \mathbb{X}_\theta> = \cosh(t)^2\sin(\theta)^2 + \cosh(t)^2\cos(\theta)^2 = \cosh(t)^2$$

La curva $\boldsymbol{\alpha}$ del enunciado se puede parametrizar mediante $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbb{X}(t,t)$, con $t \in (0, \pi/2)$. Véase el dibujo a la derecha. Su vector velocidad viene dado por $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \mathbb{X}_t(t,t) + \mathbb{X}_\theta(t,t)$ y, por tanto, su norma es

$$\|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| = \sqrt{E(t,t) + 2F(t,t) + G(t,t)} = \sqrt{2}\cosh(t)\,.$$

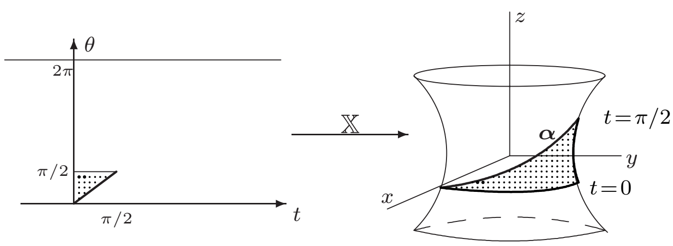


Integrando, obtenemos la longitud de $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\text{long}(\boldsymbol{\alpha}) = \int_0^{\pi/2} \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\| dt = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \cosh(t) dt = \sqrt{2}\sinh(\pi/2)\,.$$

b) Dibuja y halla el área de la porción de catenoide comprendida entre la curva $\boldsymbol{\alpha}$, el meridiano $\theta = \pi/2$ y el paralelo $t = 0$.

Solución. Obsérvese en el dibujo la porción de catenoide cuya área queremos calcular.



El área es el resultado de la siguiente integral doble:

$$\begin{aligned}
\text{área} &= \int_0^{\pi/2}\int_t^{\pi/2} \sqrt{E(t,\theta)G(t,\theta) - F(t,\theta)^2}\, d\theta\, dt = \int_0^{\pi/2}\int_t^{\pi/2} \cosh(t)^2\, d\theta\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\frac{\pi}{2} - t)\cosh(t)^2\, dt = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \cosh(t)^2\, dt - \int_0^{\pi/2} t\cosh(t)^2\, dt \\
&= \frac{\pi}{2}\Big[\frac{1}{2}\cosh(t)\sinh(t) + \frac{t}{2}\Big|_0^{\pi/2}\Big] - \Big[\frac{t}{2}\cosh(t)\sinh(t) + \frac{t^2}{4} - \frac{\cosh(t)^2}{4}\Big|_0^{\pi/2}\Big] \\
&= \frac{\cosh(\pi/2)^2}{4} + \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

5. (2 puntos) Sea S una superficie regular en $\mathbb{R}^3$ y $\boldsymbol{\gamma}(s)$ una curva birregular sobre la superficie, parametrizada por longitud de arco. Llamemos $\mathbf{N}(s)$ al vector normal a la superficie en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ (esto es, $\mathbf{N}(s) = \mathbf{N}(\boldsymbol{\gamma}(s))$).

Consideremos ahora la superficie $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ parametrizada de la siguiente manera:

$$\mathbb{X}(s,\lambda) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda\,\mathbf{N}(s)\,.$$

Calcula la curvatura gaussiana en cada punto de $S_{\boldsymbol{\gamma}}$. ¿Es posible que $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ tenga curvatura gaussiana nula en todos sus puntos?

SOLUCIÓN. Empezamos calculando

$$\mathbb{X}_s(s,\lambda) = \boldsymbol{\gamma}'(s) + \lambda\,\mathbf{N}'(s) = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) + \lambda\big[-k_n(s)\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) - \tau_g(s)\,\mathbf{C}(s)\big] = [1-\lambda k_n(s)]\,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) - \lambda\,\tau_g(s)\,\mathbf{C}(s)$$
$$\mathbb{X}_\lambda(s,\lambda) = \mathbf{N}(s)$$

En lo que sigue ya no haremos explícita la dependencia de cada una de las cantidades anteriores. Los coeficientes de la primera forma fundamental son

$$\begin{aligned} E &= <\mathbb{X}_s,\mathbb{X}_s> = [1-\lambda\,k_n]^2 + \lambda^2\,\tau_g^2\,,\\ F &= <\mathbb{X}_s,\mathbb{X}_\lambda> = 0\,,\\ G &= <\mathbb{X}_\lambda,\mathbb{X}_\lambda> = 1\,. \end{aligned}$$

Procedimiento 1. Como $F=0$, podemos aplicar la habitual fórmula para el cálculo de la curvatura gaussiana. En nuestro caso, como $G=1$, la fórmula es, simplemente,

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_\lambda}{\sqrt{EG}}\right)_\lambda + \left(\frac{G_s}{\sqrt{EG}}\right)_s\right] = -\frac{1}{2\,E^2}\left(E\,E_{\lambda\lambda} - \frac{E_\lambda^2}{2}\right)$$

Sólo queda calcular E_λ y $E_{\lambda\lambda}$ y operar.

Procedimiento 2. O bien podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental, para aplicar

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}\,.$$

Para ello necesitamos calcular el normal a la superficie $S_{\boldsymbol{\gamma}}$, que llamaremos $\mathbf{M}$ (para diferenciarlo del normal a la superficie S), que viene dado por

$$\mathbf{M} = \frac{\mathbb{X}_s\times\mathbb{X}_\lambda}{\|\mathbb{X}_s\times\mathbb{X}_\lambda\|} = \frac{\lambda\tau_g\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} + (1-\lambda k_n)\mathbf{C}}{\sqrt{[1-\lambda\,k_n]^2+\lambda^2\,\tau_g^2}}\,.$$

Obsérvese que, como $X_{\lambda\lambda}=0$, inmediatamente obtenemos que $e=\mathbf{M}\cdot X_{\lambda\lambda}=0$. Así que no necesitaremos el valor de g (lo que nos evita el cálculo, algo engorroso, de $\mathbb{X}_{ss}$). Sólo queda calcular

$$\mathbb{X}_{s\lambda} = \mathbf{N}'(s) = -k_n\,\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} - \tau_g\,\mathbf{C}\,,$$

de donde

$$f = \mathbf{M}\cdot\mathbb{X}_{s\lambda} = \frac{-\tau_g}{\sqrt{[1-\lambda\,k_n]^2+\lambda^2\,\tau_g^2}}$$

Compruébese que, con cualquiera de los dos procedimientos, el resultado es

$$K = \frac{-\tau_g^2}{\big[[1-\lambda\,k_n]^2+\lambda^2\,\tau_g^2\big]^2}\,.$$

La superficie $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ tendrá curvatura gaussiana nula en todos sus puntos en el caso en que la curva $\boldsymbol{\gamma}$ tenga torsión geodésica nula en cada uno de sus puntos. Esto es, en el caso en que $\boldsymbol{\gamma}$ sea una línea de curvatura de la superficie S.