Geometría II
Segundo de Matemáticas UAM, curso 2004-2005
Solucionario del examen final de junio, 6-6-2005

> *Nota bene:* En estas páginas aparecerán las respuestas a los ejercicios del examen, junto con algunas de las distintas maneras de abordarlos (con más detalle del que era estrictamente necesario y con comentarios adicionales).

1. (3 puntos) Contesta brevemente, pero razonando las respuestas, a las siguientes cuestiones:

(a) Consideremos dos superficies S y $\bar{S}$. Hemos encontrado una aplicación $f : S \to \bar{S}$ que es una isometría. ¿Es cierto que, para cada punto $\mathbf{p} \in S$, la curvatura media $H_S(\mathbf{p})$ coincide con la curvatura media $H_{\bar{S}}(f(\mathbf{p}))$?

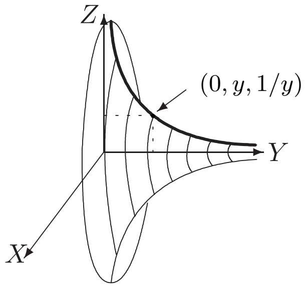
Solución. La respuesta es que no, pues la curvatura media, a diferencia de la curvatura gaussiana, no es un invariante isométrico. Pero esto requiere un argumento; en este caso, basta un contraejemplo. El más sencillo: plano y cilindro. Son superficies isométricas, ambas de curvatura gaussiana nula en todos sus puntos. Pero mientras que en el plano la curvatura media es también cero, en el cilindro no lo es.

(b) Consideramos la curva $z = 1/y$, con $y > 0$. Dibuja y parametriza la superficie que se obtiene al situar esta curva en el plano YZ y rotarla en torno al eje Y.

Solución. Podemos parametrizar la curva marcada en trazo más oscuro en la figura (curva que está en el plano YZ) como $\boldsymbol{\alpha}(y) = (0, y, 1/y)$, con $y > 0$. Al rotarla en torno al eje Y, la segunda coordenada se quedará fija, y son las otras dos las que cambiarán. Una parametrización es

$$\mathbb{X}(y, \theta) = (\frac{1}{y}\cos(\theta), y, \frac{1}{y}\sin(\theta))\,,$$

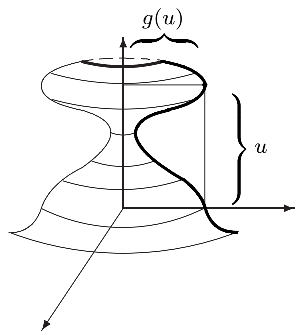
con $y > 0$, $\theta \in (0, 2\pi)$.



(c) Considera la superficie de revolución parametrizada de la siguiente manera: $\mathbb{X}(u, v) = (g(u)\cos(v), g(u)\sin(v), u)$, para $u \in (-1, 5)$ y $v \in (0, 2\pi)$. De la función $g(u)$ sabemos que tiene un máximo local en $u = 3$ y que $g(3) = 2$.

El punto $\mathbf{p} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 3)$ pertenece a la superficie. ¿Tienes información suficiente como para decidir si es un punto elíptico, hiperbólico, parabólico o plano?

Solución. Tal como está parametrizada la superficie, $g(u)$ representa la distancia al eje z de los puntos de la superficie cuya tercera coordenada es u. Recuérdese que el que la función $g(u)$ tenga un máximo en $u = 3$ significa que $g'(3) = 0$ y que $g''(3) \leq 0$ (nótese[a] el $\leq$). Un argumento cualitativo, a la vista del dibujo representativo que aparece a la derecha, nos diría que en cualquier punto de la superficie con tercera coordenada $u = 3$ (por ejemplo, el punto $\mathbf{p}$ del enunciado, que corresponde a tomar $\theta = \pi/4$), las dos curvaturas principales tienen el mismo signo y, por tanto, la curvatura gaussiana en el punto ha de ser positiva. Con lo que el punto $\mathbf{p}$ sería elíptico. Aunque en realidad una de las curvaturas principales podría ser 0 (con lo que $\mathbf{p}$ podría ser también parabólico). El argumento analítico detallado pasaría por calcular explícitamente la curvatura gaussiana en una superficie como ésta (un cálculo que hicimos en clase) para obtener que



$$K = \frac{-g''(u)}{g(u)(1 + g'(u))^2}\,,$$

que nos dice que el punto $\mathbf{p}$ es elíptico (si $g''(3) < 0$) o parabólico (si $g''(3) = 0$).

[a]Ejemplo: la función $h(x) = -x^4$ tiene un máximo en $x = 0$ y la segunda derivada es también 0 en $x = 0$.

(d) Sea $\boldsymbol{\gamma}(s)$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco cuya traza está contenida en una superficie S. Supongamos que $\boldsymbol{\gamma}$ es una geodésica en S. ¿Cuál es la relación entre el plano tangente $T_{\boldsymbol{\gamma}(s)}S$ y el plano osculador de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$?

Solución. Por estar parametrizada por longitud de arco, $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s)\| = 1$ para cada s y, por tanto, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$. Así que $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \dot{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$, y recordemos que $\dot{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ es paralelo al vector $\mathbf{n}(s)$ en cada s (con la curvatura como factor de proporcionalidad).

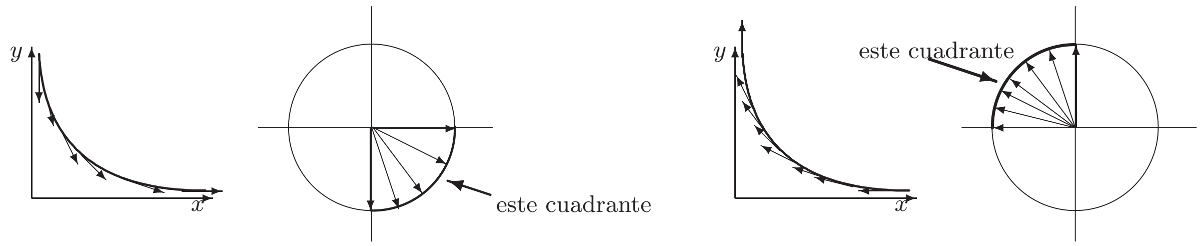
Por otro lado, por ser geodésica, $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \dot{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ es paralelo al vector $\mathbf{N}(s)$ en cada s.

Lo que nos lleva a concluir que el vector $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ normal a la curva (en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$) y el vector $\mathbf{N}(s)$ normal a la superficie (también en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$) son paralelos.

Como el plano tangente $T_{\boldsymbol{\gamma}(s)}S$ tiene como vector director a $\mathbf{N}(s)$ y el plano osculador a $\mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$, concluimos que ambos planos son perpendiculares.

(e) Cuando se recorre la curva plana $y = 1/x$, con $x > 0$, los vectores tangentes recorren un arco de la circunferencia unidad. ¿Cuál? Dibújalo.

Solución. Si, por ejemplo, recorremos la curva en el sentido que se representa en el dibujo, los vectores tangentes (que son siempre unitarios) empiezan "apuntando" hacia abajo, para terminar hacia la derecha. Luego se recorre el arco de circunferencia que aparece debajo de estas líneas (a la izquierda). Si recorremos la curva en el otro sentido, el resultado es un cuadrante distinto (dibujo de la derecha).



2. (2 puntos) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Sea $\{\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\}$ su triedro de Frenet en s y nombremos como $\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ y $\tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ a su curvatura y torsión en s.

Definimos, a partir de $\boldsymbol{\gamma}$, la curva $\boldsymbol{\alpha}$ dada por

$$\boldsymbol{\alpha}(s) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\,, \qquad \text{para cada } s \in I$$

a) Observa que s no tiene por qué ser necesariamente parámetro longitud de arco para la curva $\boldsymbol{\alpha}$. ¿Qué condiciones serían necesarias para que lo fuera?

Solución. Calculamos

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \dot{\boldsymbol{\gamma}}(s) + \dot{\mathbf{b}}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) + \tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\,,$$

de manera que

$$\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)\| = \|\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) + \tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\| = \sqrt{1 + \tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s)^2}\,,$$

donde hemos utilizado que los vectores $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ y $\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ son unitarios y perpendiculares. Así que, para que $\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)\|$ fuera 1 para todo s, necesitaríamos que

$$1 = 1 + \tau_{\boldsymbol{\gamma}}^2(s) \quad \Longrightarrow \quad \tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = 0 \qquad \text{para todo } s.$$

O, en otras palabras, que $\boldsymbol{\gamma}$ fuera una curva plana.

b) Supongamos que $\boldsymbol{\gamma}$ tiene curvatura y torsión constantes. Esto es, $\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \kappa$ y $\tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \tau$ para todo $s \in I$. ¿Cuál es la curvatura $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ de la curva $\boldsymbol{\alpha}$ en cada $s \in I$? ¿Qué ocurre si la curva $\boldsymbol{\gamma}$ es plana?

SOLUCIÓN. Como la curva $\boldsymbol{\alpha}$ no está necesariamente parametrizada por longitud de arco,

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\|\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \ddot{\boldsymbol{\alpha}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}\|^3}\,.$$

Así que partimos de la primera derivada, que tenemos calculada del apartado anterior:

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) + \tau \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\,, \quad \text{vector cuya norma es} \quad \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(s)\| = \|\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) + \tau \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\| = \sqrt{1+\tau^2}\,.$$

Ahora τ es una constante, lo que facilita el cálculo de la segunda derivada (véase la primera igualdad):

$$\ddot{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \dot{\mathbf{t}}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) + \tau \dot{\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) = \kappa\, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) + \tau\,\big(-\kappa\, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) - \tau\, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\big) = -\kappa\,\tau\, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) + \kappa\, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s) - \tau^2\, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\,.$$

(En lo que sigue ya no haremos explícita la dependencia en s). Su producto vectorial es

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \ddot{\boldsymbol{\alpha}} &= \big[\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} + \tau \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}\big] \times \big[-\kappa\,\tau\, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} + \kappa\, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}} - \tau^2\, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}\big] \\ &= \kappa\underbrace{(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}})}_{=\mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}} - \tau^2\underbrace{(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}})}_{=-\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}} - \kappa\tau^2\underbrace{(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}})}_{=-\mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}} - \tau^3\,\underbrace{(\mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}} \times \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}})}_{=\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}} = -\tau^3\, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} + \tau^2\, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}} + \kappa\,(1+\tau^2)\, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}\,. \end{aligned}$$

La norma de este vector es

$$\|\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \ddot{\boldsymbol{\alpha}}\| = \|-\tau^3\, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} + \tau^2\, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}} + \kappa\,(1+\tau^2)\, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}\| = \sqrt{\kappa^2(1+\tau^2)^2 + \tau^4 + \tau^6} = \sqrt{\kappa^2(1+\tau^2)^2 + \tau^4(1+\tau^2)}\,,$$

donde hemos utilizado que la de Frenet es una base ortonormal. Finalmente,

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{\|\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \ddot{\boldsymbol{\alpha}}\|}{\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}\|^3} = \left(\frac{\kappa^2(1+\tau^2)^2 + \tau^4(1+\tau^2)}{(1+\tau^2)^3}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{\kappa^2(1+\tau^2)+\tau^4}}{1+\tau^2}\,.$$

Si la curva $\boldsymbol{\gamma}$ es plana, es decir, si $\tau = 0$, entonces las curvaturas de $\boldsymbol{\alpha}$ y la de $\boldsymbol{\gamma}$ coinciden.

3. (2 puntos) Sea $\boldsymbol{\gamma} : I \to \mathbb{R}^3$ una curva birregular parametrizada por longitud de arco. Sean, como antes, $\{\mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s), \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\}$ el triedro de Frenet y $\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ y $\tau_{\boldsymbol{\gamma}}(s)$ la curvatura y la torsión.

Definimos, a partir de $\boldsymbol{\gamma}$, la *superficie* $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ parametrizada por

$$\mathbb{X}(s,\lambda) = \boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda\, \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}(s)\,, \qquad \text{para } s \in I \text{ y } \lambda \in I'.$$

Calcula la curvatura gaussiana en cada punto de $S_{\boldsymbol{\gamma}}$. ¿Es posible conseguir que $S_{\boldsymbol{\gamma}}$ tenga curvatura gaussiana nula en todos sus puntos?

SOLUCIÓN. (En lo que sigue no haremos explícita la dependencia en los parámetros s y λ). Primero:

$$\begin{cases} \mathbb{X}_s &= \boldsymbol{\gamma}' + \lambda\, \mathbf{n}'_{\boldsymbol{\gamma}} = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} + \lambda(-\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}\, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} - \tau_{\boldsymbol{\gamma}}\, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}) = (1-\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}\,\lambda)\, \mathbf{t}_{\boldsymbol{\gamma}} - \lambda\, \tau_{\boldsymbol{\gamma}}\, \mathbf{b}_{\boldsymbol{\gamma}}\,; \\ \mathbb{X}_\lambda &= \mathbf{n}_{\boldsymbol{\gamma}}\,. \end{cases}$$

De donde obtenemos inmediatamente los coeficientes de la primera forma fundamental:

$$\begin{cases} E &= \ <\mathbb{X}_s, \mathbb{X}_s>= (1-\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}\,\lambda)^2 + \lambda^2\,\tau_{\boldsymbol{\gamma}}^2\,; \\ F &= \ <\mathbb{X}_s, \mathbb{X}_\lambda>= 0\,; \\ G &= \ <\mathbb{X}_\lambda, \mathbb{X}_\lambda>= 1\,; \end{cases}$$

donde hemos utilizado la ortonormalidad de la base de Frenet. **Primera solución**: dado que $F = 0$, podemos utilizar la fórmula de Gauss, que en este caso se escribe (puesto que $G = 1$) como

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\left[\left(\frac{E_\lambda}{\sqrt{E}}\right)_\lambda\right].$$

Tras unas cuantas manipulaciones y simplificaciones, se llega a que

$$K = -\frac{\tau_{\boldsymbol{\gamma}}^2}{\big[(1-\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}\,\lambda)^2 + \lambda^2\,\tau_{\boldsymbol{\gamma}}^2\big]^2}\,.$$

Segunda solución: la otra posibilidad pasa por calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental. Primero,

$$\mathbb{X}_s \times \mathbb{X}_\lambda = \big[(1-\kappa_\gamma\,\lambda)\mathbf{t}_\gamma - \lambda\,\tau_\gamma\,\mathbf{b}_\gamma\big] \times \mathbf{n}_\gamma = (1-\kappa_\gamma\,\lambda)\,\mathbf{b}_\gamma + \lambda\,\tau_\gamma\,\mathbf{t}_\gamma\,,$$

vector cuya norma es

$$\|\mathbb{X}_s \times \mathbb{X}_\lambda\| = \|(1-\kappa_\gamma\,\lambda)\,\mathbf{b}_\gamma + \lambda\,\tau_\gamma\,\mathbf{t}_\gamma\| = \sqrt{(1-\kappa_\gamma\lambda)^2 + \lambda^2\,\tau_\gamma^2}\,.$$

Así que el vector normal es

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbb{X}_s \times \mathbb{X}_\lambda}{\|\mathbb{X}_s \times \mathbb{X}_\lambda\|} = \frac{1}{\sqrt{(1-\kappa_\gamma\lambda)^2 + \lambda^2\,\tau_\gamma^2}}\,\big[(1-\kappa_\gamma\,\lambda)\,\mathbf{b}_\gamma + \lambda\,\tau_\gamma\,\mathbf{t}_\gamma\big]\,.$$

Ahora tenemos que calcular las segundas derivadas de la parametrización. Conviene observar primero que

$$\mathbb{X}_{\lambda\lambda} = \mathbf{0}\,,$$

lo que nos dice que $g = 0$ y que, por tanto, no necesitamos calcular $\mathbb{X}_{ss}$ (que nos llevaría al coeficiente e). La otra es

$$\mathbb{X}_{s\lambda} = \mathbf{n}'_\gamma = -\kappa_\gamma\,\mathbf{t}_\gamma - \tau_\gamma\,\mathbf{b}_\gamma\,.$$

Con lo que

$$\begin{aligned} f = \mathbf{N}\cdot\mathbb{X}_{s\lambda} &= \frac{1}{\sqrt{(1-\kappa_\gamma\lambda)^2 + \lambda^2\,\tau_\gamma^2}}\,\big[(1-\kappa_\gamma\,\lambda)\,\mathbf{b}_\gamma + \lambda\,\tau_\gamma\,\mathbf{t}_\gamma\big]\cdot\big[-\kappa_\gamma\,\mathbf{t}_\gamma - \tau_\gamma\,\mathbf{b}_\gamma\big] \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1-\kappa_\gamma\lambda)^2 + \lambda^2\,\tau_\gamma^2}}\,\Big[-\tau_\gamma(1-\kappa_\gamma\,\lambda) - \kappa_\gamma\,\tau_\gamma\,\lambda\Big] = \frac{-\tau_\gamma}{\sqrt{(1-\kappa_\gamma\lambda)^2 + \lambda^2\,\tau_\gamma^2}}\,. \end{aligned}$$

Finalmente,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-f^2}{E} = -\frac{\tau_\gamma^2}{\big[(1-\kappa_\gamma\,\lambda)^2 + \lambda^2\,\tau_\gamma^2\big]^2}\,,$$

como antes.

Sea cual sea el método utilizado, la condición para obtener curvatura gaussiana nula en todos los puntos de la superficie es que τ_γ sea 0 en todo punto. Es decir, que $\boldsymbol{\gamma}$ sea una curva plana.

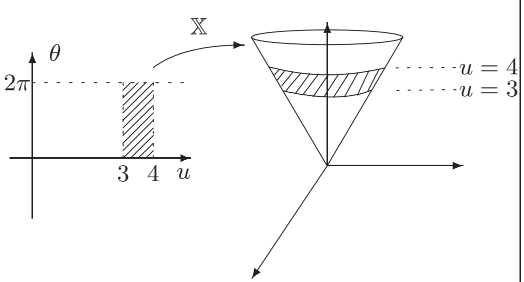
4. (2 puntos) Consideremos la superficie de un cono, que parametrizamos mediante

$$\mathbb{X}(u,\theta) = (u\cos\theta, u\sin\theta, u)\,,\qquad \text{con } u > 0 \text{ y } \theta \in (0, 2\pi).$$

a) Halla el área de la banda que incluye los puntos del cono con coordenada u entre 3 y 4.

Solución. Para este cálculo sólo necesitamos los coeficientes de la primera forma fundamental. Empezamos con las derivadas parciales

$$\begin{cases} \mathbb{X}_u &= (\cos\theta, \sin\theta, 1) \\ \mathbb{X}_\theta &= (-u\sin\theta, u\cos\theta, 0)\,, \end{cases}$$



de donde

$$\begin{cases} E &= <\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_u> = \cos^2\theta + \sin^2\theta + 1 = 2 \\ F &= <\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_\theta> = -u\sin\theta\cos\theta + u\sin\theta\cos\theta = 0 \\ G &= <\mathbb{X}_\theta, \mathbb{X}_\theta> = u^2\sin^2\theta + u^2\cos^2\theta = u^2 \end{cases}$$

La combinación $\sqrt{EG - F^2}$ resulta valer $\sqrt{2}\,u$. Así que el área de la banda del dibujo es

$$\int_3^4\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\,u d\theta\,du = 2\sqrt{2}\pi\int_3^4 u\,du = 2\sqrt{2}\pi\left(\frac{u^2}{2}\bigg|_3^4\right) = 7\sqrt{2}\,\pi\,.$$

b) Halla la longitud de la curva del cono que, en coordenadas, viene dada por $u = \theta$, y que une los puntos $\mathbf{p} = (\pi\sqrt{2}/8, \pi\sqrt{2}/8, \pi/4)$ y $\mathbf{q} = (0, \pi/2, \pi/2)$.

SOLUCIÓN. Obsérvese que el punto $\mathbf{p}$ tiene coordenadas $u = \theta = \pi/4$, mientras que $\mathbf{q}$ tiene $u = \theta = \pi/2$. Podemos entonces parametrizar la curva de la que queremos calcular la longitud como

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbb{X}(t,t)\,, \qquad \text{con } t \in (\pi/4, \pi/2).$$

Su derivada es

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \mathbb{X}_u(t,t) + \mathbb{X}_\theta(t,t)\,,$$

y la norma de este vector,

$$\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\| = \|\mathbb{X}_u(t,t) + \mathbb{X}_\theta(t,t)\| = \sqrt{E(t,t) + 2F(t,t) + G(t,t)} = \sqrt{2+t^2}\,.$$

Por lo que la longitud de la curva resulta ser

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t)\|\,dt = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{2+t^2}\,dt\,.$$

La integral se puede escribir en términos de funciones elementales:

$$\int \sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{2+t^2} + \operatorname{arcsinh}\Big(\frac{t\sqrt{2}}{2}\Big)$$

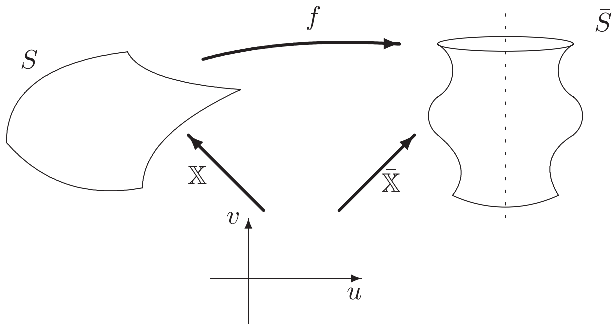
5. (1 punto)

a) La superficie S está parametrizada por una cierta $\mathbb{X}(u,v)$ de la que sabemos que $E = 1$, que $F \equiv 0$ y que $G \equiv G(u)$ (es decir, G es una función únicamente de u). Comprueba que si

$$\left[\frac{d}{du}\sqrt{G(u)}\right]^2 < 1\,,$$

entonces S es isométrica a una superficie de revolución.

SOLUCIÓN. Obsérvese el siguiente diagrama:



A la izquierda hemos dibujado la superficie S, dada por la parametrización $\mathbb{X}(u,v)$. A la derecha, la superficie de revolución que estamos persiguiendo. Desconocemos su forma precisa, y la supondremos determinada por una cierta parametrización $\bar{\mathbb{X}}(u,v)$. La aplicación f de S a $\bar{S}$ aplica cada punto $\mathbb{X}(u,v)$ en el correspondiente $\bar{\mathbb{X}}(u,v)$. Esto es, $f(\mathbb{X}(u,v)) = \bar{\mathbb{X}}(u,v)$. Para que esta aplicación sea una isometría entre las superficies, se tendrá que cumplir que los coeficientes de la primera forma fundamental E, F, G (de la parametrización $\mathbb{X}$) coincidan (como funciones) con los correspondientes $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ (de la parametrización $\bar{\mathbb{X}}$).

Así que nuestra estrategia será buscar parametrizaciones generales $\bar{\mathbb{X}}$ de superficies de revolución para las que $\bar{E}(u,v) = 1$, $\bar{F}(u,v) = 0$ y $\bar{G}(u,v) = G(u)$.

Primer intento (que se demostrará fallido): parametrizamos una superficie de revolución como

$$\bar{\mathbb{X}}(u,v) = (g(u)\cos(v), g(u)\sin(v), u)\,,$$

donde $g(u)$ es una cierta función. Calculamos primero

$$\bar{\mathbb{X}}_u = (g'(u)\cos(v), g'(u)\sin(v), 1) \qquad \text{y} \qquad \bar{\mathbb{X}}_v = (-g(u)\sin(v), g(u)\cos(v), 0)\,.$$

Por lo que

$$\bar{E} = 1 + g'(u)^2\,, \qquad \bar{F} = 0 \qquad \text{y} \qquad \bar{G} = g^2(u)\,.$$

El objetivo, recordemos, es conseguir que $\bar{E} = 1$, $\bar{F} = 0$ y $\bar{G} = G(u)$. Pero el que $\bar{E} = 1$ nos obligaría a que g fuera una función constante, lo que nos impediría (¡a menos que la función $G(u)$ de partida fuera también constante!) conseguir que $\bar{G} = G(u)$.

Necesitamos darnos algún grado más de libertad. Obsérvese que, en la parametrización anterior de una superficie de revolución, estamos suponiendo que la curva generadora (puesta en el plano YZ) es de la forma $(g(u), u)$. Podemos intentar con una curva más general, de la forma $(g(u), h(u))$. La parametrización correspondiente sería

$$\bar{\mathbb{X}}(u,v) = (g(u)\cos(v), g(u)\sin(v), h(u))\,,$$

que nos llevaría a que $\bar{E} = h'(u)^2 + g'(u)^2$, $\bar{F} = 0$ y $\bar{G} = g^2(u)$.

Y ahora sí que podemos proceder. Primero, decidimos que $g(u)$ coincida con $+\sqrt{G(u)}$ (recuérdese que $G(u)$ es una función positiva). Con esto tenemos que $G = \bar{G}$ (el que $F = \bar{F}$ lo tenemos siempre seguro).

Al haber fijado la función $g(u)$, tenemos también (el cuadrado de) su derivada:

$$g'(u)^2 = \left[\left(\sqrt{G(u)}\right)'\right]^2.$$

Y para que $\bar{E}$ valga 1, sólo necesitamos una función $h(u)$ que cumpla que

$$1 = h'(u)^2 + \left[\left(\sqrt{G(u)}\right)'\right]^2.$$

Pero justo la condición del enunciado garantiza que una tal $h(u)$ exista.

b) Y si fuera $F \equiv 0$, $E = E(u)$ y $G = G(u)$, ¿qué condición general sobre $E(u)$ y $G(u)$ te permitiría concluir que S es isométrica a una superficie de revolución?

Solución. Arrancamos de nuevo con la parametrización

$$\bar{\mathbb{X}}(u,v) = (g(u)\cos(v), g(u)\sin(v), h(u))\,,$$

que nos lleva a

$$\bar{E} = h'(u)^2 + g'(u)^2\,, \qquad \bar{F} = 0 \qquad \text{y} \qquad \bar{G} = g^2(u)\,.$$

Como antes, escogemos $g(u)$ para que coincida con $+\sqrt{G(u)}$. Y ahora necesitamos que exista una función $h(u)$ tal que

$$E(u) = h'(u)^2 + \left[\left(\sqrt{G(u)}\right)'\right]^2.$$

Una condición suficiente para que esa tal $h(u)$ exista es que

$$E(u) - \left[\left(\sqrt{G(u)}\right)'\right]^2 < 1\,.$$