**Geometría II**
**Segundo de Matemáticas UAM, curso 2004-2005**
**Examen parcial (grupo de mañana), 17-3-2005**

**1.** Escribe las condiciones que ha de cumplir un punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ para que pertenezca al plano osculador de la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), t)$, $t \in \mathbb{R}$, en el punto $\boldsymbol{\gamma}(0) = (1,0,0)$.

Solución. Observemos primero que, para cada $t \in \mathbb{R}$, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (\sinh(t), \cosh(t), 1)$, así que el parámetro $t$ no es, obviamente, longitud de arco.
Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ estará en el plano osculador a la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(0) = (1,0,0)$ si cumple que

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(0)) \cdot \mathbf{b}(0) = 0\,,$$

esto es, si el vector $\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(0)$ es perpendicular al vector binormal a $\boldsymbol{\gamma}$ *en el punto* $\boldsymbol{\gamma}(0)$. Así que necesitamos conocer la expresión del vector binormal a la curva en cada punto,

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|}\,,$$

para luego evaluarlo en $t = 0$. Calculamos entonces

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= (\sinh(t), \cosh(t), 1)\,;\\
\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= (\cosh(t), \sinh(t), 0)\,;\\
\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= (-\sinh(t), \cosh(t), -1)\,.
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{b}(t)$ y $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ tienen la misma dirección y sentido, a los efectos que perseguimos (determinar vectores perpendiculares), ni siquiera es necesario calcular $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$. Así que basta saber que

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(0) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(0) = (0,1,-1)$$

para concluir que los puntos $\mathbf{x} = (x,y,z)$ del plano osculador en cuestión verifican que

$$\big[(x,y,z) - (1,0,0)\big] \cdot (0,1,-1) = 0 \Longrightarrow \quad (x-1,y,z) \cdot (0,1,-1) = 0 \Longrightarrow \quad y = z\,.$$

**2.** ¿Qué funciones diferenciables $f(t)$ hacen que $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cosh(t), \sinh(t), f(t))$, para $t \in \mathbb{R}$, sea una curva plana?

Solución. Para que $\boldsymbol{\gamma}$ sea una curva plana, su torsión ha de ser nula en cada punto. Es decir,

$$0 = \tau(t) = -\frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|} \qquad \text{para todo } t.$$

Esto es, deberá verificarse que $(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = 0$ para todo $t$. Calculamos entonces[a]

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= (\sinh(t), \cosh(t), \dot{f}(t))\\
\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= (\cosh(t), \sinh(t), \ddot{f}(t))\\
\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= (\cosh(t)\ddot{f}(t) - \sinh(t)\dot{f}(t), -\sinh(t)\ddot{f}(t) + \cosh(t)\dot{f}(t), -1)\\
\dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= (\sinh(t), \cosh(t), \dddot{f}(t))\,,
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) &= \cosh(t)\sinh(t)\ddot{f}(t) - \sinh^2(t)\dot{f}(t) - \sinh(t)\cosh(t)\ddot{f}(t) + \cosh^2(t)\dot{f}(t) - \dddot{f}(t)\\
&= \dot{f}(t) - \dddot{f}(t)\,.
\end{aligned}$$

Así que la respuesta son las funciones $f(t)$ cuya primera derivada coincida con la tercera: $\dot{f}(t) = \dddot{f}(t)$. Estas funciones se pueden escribir como combinación lineal de constantes y exponenciales:

$$f(t) = A + B\,e^t + C\,e^{-t} \qquad \text{(o también de constantes y senos y cosenos hiperbólicos).}$$

[a] Obsérvese que, para todo $t$, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \neq \mathbf{0}$ y $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \neq \mathbf{0}$ (así que la curvatura es $\neq 0$ en todo punto),

**3.** Viajamos por el plano, partiendo del origen $(0, 0)$, siguiendo la traza de la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (t, t^2)$, donde el parámetro $t \geq 0$ es el tiempo (en segundos). Tras dos segundos, cambiamos la trayectoria y nos vamos por la circunferencia tangente ("por dentro") a $\boldsymbol{\gamma}(2)$ y que tiene radio $1/\kappa_{\boldsymbol{\gamma}}(2)$. Recorremos (en sentido horario) media circunferencia. ¿En qué punto del plano nos encontraremos? ¿Y si sólo recorremos un cuarto de circunferencia?

Solución. Tras 2 segundos, estamos en el punto $\boldsymbol{\gamma}(2) = (2, 4)$. Para calcular la curvatura en ese punto, $\kappa(2)$, evaluamos primero

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (1, 2t) \qquad \text{y} \qquad \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (0, 2)\,,$$

de donde deducimos que

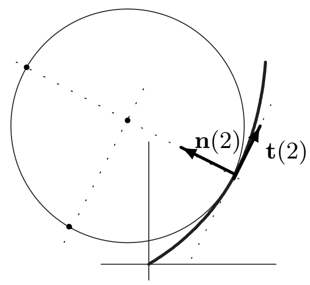
$$\kappa(t) = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}} \quad \Longrightarrow \quad \kappa(2) = \frac{2}{17^{3/2}} = \frac{2}{17\sqrt{17}}\,,$$

de forma que el radio de la circunferencia por la que seguimos nuestro camino es $17\sqrt{17}/2$ (¡un radio muy grande, por cierto!). En el punto $t = 2$, los vectores tangente y normal[a] a la curva $\boldsymbol{\gamma}$ son:

$$\mathbf{t}(2) = \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(2)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(2)\|} = \frac{(1,4)}{\sqrt{17}} \qquad \text{y} \qquad \mathbf{n}(2) = \frac{(-4,1)}{\sqrt{17}}\,.$$

Así que el centro de la circunferencia $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ es

$$\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\gamma}(2) + \frac{1}{\kappa(2)}\,\mathbf{n}(2) = (2,4) + \frac{17\sqrt{17}}{2}\,\frac{(-4,1)}{\sqrt{17}} = \Big(-32, \frac{25}{2}\Big)\,,$$




pues llegaremos a ese centro yendo hasta $\boldsymbol{\gamma}(2)$ y luego recorriendo, en la dirección de $\mathbf{n}(2)$, todo el radio de la circunferencia (véase el dibujo de la derecha, que, por supuesto, no está a escala). Si recorremos en sentido horario media circunferencia, estaremos en el punto

$$\boldsymbol{\gamma}(2) + 2\,\frac{1}{\kappa(2)}\,\mathbf{n}(2) = (-66, 21)$$

(ir hasta $\boldsymbol{\gamma}(2)$ y luego recorrer un diámetro en la dirección de $\mathbf{n}(2)$). Finalmente, si sólo recorremos un cuarto de circunferencia, entonces nos hallaremos en el punto

$$\boldsymbol{\gamma}(2) + \frac{1}{\kappa(2)}\,\mathbf{n}(2) - \frac{1}{\kappa(2)}\,\mathbf{t}(2) = \Big(-\frac{81}{2}, -\frac{43}{2}\Big)$$

(ir hasta $\boldsymbol{\gamma}(2)$, luego hasta el centro de la circunferencia, y luego "bajar" el radio en la dirección de $\mathbf{t}(2)$).

[a] Recuérdese que, para curvas planas, definimos el vector normal como el rotado $\pi/2$ en sentido antihorario con respecto al tangente.

**Notas y comentarios**:

- $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$;
- $\cosh(x)^2 + \sinh(x)^2 = 2\cosh(x)^2 - 1 = 1 + 2\sinh(x)^2$.
- El plano osculador está determinado por el vector tangente y el normal.

**Geometría II**
**Segundo de Matemáticas UAM, curso 2004-2005**
**Examen parcial (grupo de tarde), 17-3-2005**

**1.** Escribe las condiciones que ha de cumplir un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ para que pertenezca al plano normal de la curva $\boldsymbol{\gamma}(t) = (\cos(t), \sin(t), e^{t/\pi})$, $t \in \mathbb{R}$, en el punto $\boldsymbol{\gamma}(\pi/2)$.

Solución. Observemos primero que, para cada $t \in \mathbb{R}$,

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = \Big( -\sin(t), \cos(t), \frac{1}{\pi}\, e^{t/\pi} \Big) \,,$$

así que el parámetro $t$ no es, obviamente, longitud de arco.
Un punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ estará en el plano normal a la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(\pi/2) = (0, 1, \sqrt{e})$ si cumple que

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\pi/2)) \cdot \mathbf{t}(\pi/2) = 0 \,,$$

esto es, si el vector $\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(\pi/2)$ es perpendicular al vector tangente a $\boldsymbol{\gamma}$ *en el punto* $\boldsymbol{\gamma}(\pi/2)$. Así que necesitamos calcular la expresión del vector tangente a la curva en cada punto,

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|} \,,$$

para luego evaluarlo en $t = \pi/2$. Pero como $\mathbf{t}(t)$ y $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$ tienen la misma dirección y sentido, a los efectos que perseguimos (determinar vectores perpendiculares), ni siquiera es necesario calcular $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|$.
Así que basta saber que

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(\pi/2) = (-1, 0, \sqrt{e}/\pi)$$

para concluir que los puntos $\mathbf{x} = (x, y, z)$ del plano normal en cuestión verifican que

$$\begin{aligned} \big[(x, y, z) - (0, 1, \sqrt{e})\big] \cdot (-1, 0, \sqrt{e}/\pi) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad (x, y-1, z-\sqrt{e}) \cdot (-1, 0, \sqrt{e}/\pi) &= 0 \\ \Longrightarrow \quad -x + (z - \sqrt{e})\frac{\sqrt{e}}{\pi} &= 0 \\ \Longrightarrow \quad \sqrt{e}\, z - \pi\, x - e &= 0 \end{aligned}$$

**2.** ¿Es posible en una curva birregular del espacio todas las rectas binormales concurran en un punto? Si es posible, ¿qué tipo de curva será?

Solución. Llamemos $\boldsymbol{\gamma}$ a la curva en cuestión. Podemos suponer que está parametrizada por longitud de arco. Si un punto $\mathbf{p}$ estuviera en la intersección de todas las rectas binormales, entonces existiría una función $\lambda(s)$ (diferenciable) tal que

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\gamma}(s) + \lambda(s)\, \mathbf{b}(s) \qquad \text{para todo } s.$$

Derivando con respecto a $s$, tendríamos que

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \boldsymbol{\gamma}'(s) + \lambda'(s)\, \mathbf{b}(s) + \lambda(s)\, \mathbf{b}'(s) \\ &= \mathbf{t}(s) + \lambda'(s)\mathbf{b}(s) + \lambda(s)\tau(s)\mathbf{n}(s) \,. \end{aligned}$$

Y esto, para todo $s$. Pero como $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ forman un triedro de vectores linealmente independientes, la única combinación lineal que da como resultado el vector $\mathbf{0}$ es la que tiene coeficientes nulos. ¡Y $\mathbf{t}(s)$ lleva un coeficiente 1 en la expresión anterior! Luego es imposible que exista tal punto $\mathbf{p}$. (O, de otra manera, multiplicando escalarmente por $\mathbf{t}(s)$ la identidad anterior, llegamos a una contradicción).

**3.** Viajamos por el plano partiendo del origen $(0,0)$. Y lo hacemos siguiendo la traza de la curva $\boldsymbol{\gamma} : [0,1) \to \mathbb{R}^2$ (parametrizada por longitud de arco) que cumple que

- $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0,0)$;
- $\boldsymbol{\gamma}'(0) = (1,0)$;
- su curvatura es $\kappa(s) = \dfrac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ para cada $s \in [0,1)$.

Tras recorrer una unidad de longitud (digamos metros), abandonamos la curva para seguir la dirección de la tangente a la curva en el punto de escape. Recorremos así otros 3 metros. ¿A qué distancia (en metros) del punto original $(0,0)$ nos encontraremos?

SOLUCIÓN. Vamos a obtener primero la curva plana $\boldsymbol{\gamma}$ a partir de la información del enunciado. Como está parametrizada por longitud de arco, sabemos que $\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\| = 1$ para todo $s$, de manera que podremos escribir las coordenadas de $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ como el coseno y el seno de una cierta función $\theta(s)$ diferenciable. Esta función ha de cumplir que $\theta'(s) = 1/\sqrt{1-s^2}$, para que al final $\boldsymbol{\gamma}$ tenga la curvatura apropiada. Lo que supone que

$$\theta(s) = \arcsin(s) + C_1$$

y que el vector velocidad sea

$$\boldsymbol{\gamma}'(s) = \big(\cos(\arcsin(s) + C_1), \sin(\arcsin(s) + C_1)\big)\,.$$

Pero como $\boldsymbol{\gamma}'(0) = (1,0)$, debemos tomar la constante $C_1$ como 0 (o como cualquier múltiplo de $2\pi$) y escribir que

$$\boldsymbol{\gamma}'(s) = \big(\cos(\arcsin(s)), \sin(\arcsin(s))\big) = \big(\sqrt{1-s^2}, s\big)\,.$$

Sólo queda integrar este vector para obtener la curva:

$$\boldsymbol{\gamma}(s) = \Big(\frac{s}{2}\sqrt{1-s^2} + \frac{1}{2}\arcsin(s) + C_2, \frac{s^2}{2} + C_3\Big)\,.$$

Como $\boldsymbol{\gamma}(0) = (0,0)$, las constantes resultan ser $C_2 = C_3 = 0$. Tras recorrer una unidad de longitud (es decir[a], cuando $s = 1$), estaremos en el punto $(\pi/4, 1/2)$ y la dirección de la recta tangente en ese punto es $(0,1)$. Así que, si recorremos 3 metros en esa dirección (vertical), llegaremos al punto $(\pi/4, 7/2)$, cuya distancia al origen es

$$\sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{49}{4}}\,.$$

[a] ¡Atención!, la curva sólo estaba definida para $0 \le s < 1$, así que el "punto" $\boldsymbol{\gamma}(1)$ y el "vector tangente" $\boldsymbol{\gamma}'(1)$ hay que entenderlos en el sentido del límite $s \to 1^-$.

---

**Notas y comentarios**:

- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x)$.
- $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin(x)$.
- El plano normal es el generado por el vector normal y el vector binormal.