Matemática Discreta
Segundo de Ingeniería Informática UAM
Curso 2006-2007

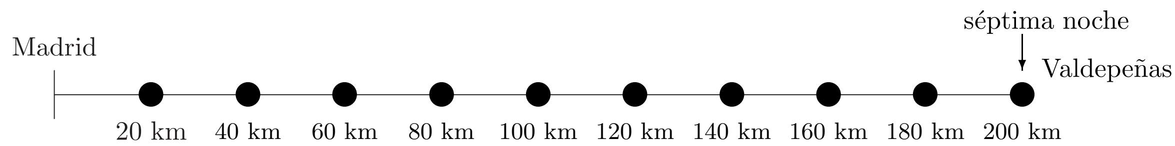
Solucionario del examen final del 26-1-2007

Nota bene: A continuación exhibimos algunas de las distintas maneras de abordar los ejercicios (pero podría haber otras igualmente correctas).

1. (2 puntos) En la *V Caminata Madrileño–Manchega,* los participantes caminan de Madrid a Valdepeñas (200 Km), de modo que tardan exactamente 7 días en ello. Hay un albergue para dormir cada 20 Km. Cada participante recorre cada día una distancia (múltiplo de 20 Km), de modo que llega a un albergue, distinto al de la noche anterior, y puede dormir en él. La séptima noche todos duermen en el albergue de Valdepeñas. Cada participante tiene una credencial con 7 casillas y cada día apunta en la casilla correspondiente la distancia que ha recorrido. Así obtiene una 7–lista.

(a) Calcula cuántas listas distintas pueden obtenerse.

Solución. Ésta es la situación planteada:



Dado que la séptima noche se duerme en Valdepeñas, decidir un itinerario consiste únicamente en determinar en qué *seis* albergues se pasan las noches anteriores. Y hay 9 donde escoger. La respuesta, por tanto, es simplemente

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! \times 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 84\,.$$

Un argumento alternativo. Sean $d_1, \dots, d_7$ las distancias que se recorren cada uno de los días. Los d_j son múltiplos de 20 km. Nótese que $d_1 + \cdots + d_7 = 200$. Un itinerario es una lista $(d_1, \dots, d_7)$ con las condiciones anteriores.
Para contar cuántas de estas listas hay, es mejor considerar unos números $x_1, \dots, x_7$ definidos mediante $d_j = 20\,x_j$ para cada $j = 1, \dots, 7$. Ahora los x_j son ≥ 1 y suman 10. Así que un itinerario es lo mismo que una solución de

$$\begin{cases} x_1 + \cdots + x_7 & = & 10 \\ \qquad\quad x_j & \geq & 1 \end{cases}$$

Y sabemos que hay

$$\binom{10-1}{7-1} = \binom{9}{6} = 84 \qquad \text{soluciones de esta ecuación diofántica.}$$

(b) Demuestra que si hay 100 participantes en la caminata, hay al menos dos que han coincidido en los mismos albergues todos los días.

Solución. Hay 84 itinerarios posibles y 100 participantes en la caminata. Como hay más participantes (palomas) que itinerarios (nidos), el principio del palomar asegura que habrá, al menos, dos participantes que sigan el mismo itinerario. Es decir, que duerman en exactamente los mismos albergues.

2. (2 puntos) Acaban de salir de la fábrica 25 vehículos. 10 de ellos son del modelo A, todos azules (y tan nuevecitos que son indistinguibles unos de otros). Otros 7 coches son del modelo B, todos rojos, y también idénticos. Los restantes 8 son del modelo C, verdes, todos iguales.

(a) En el exterior de la fábrica hay un aparcamiento, cuyas plazas están numeradas del 1 al 25. ¿De cuántas maneras distintas podremos aparcar los 25 coches?

Solución. Para decidir cómo aparcamos los coches, podemos seguir el siguiente procedimiento:

- Primero, decidimos dónde situamos los coches azules. Es decir, elegimos 10 plazas (de las 25 disponibles). Tarea que se puede hacer de $\binom{25}{10}$ formas distintas.
- Una vez colocados los 10 azules, situamos los 7 rojos. Para ello, tenemos que elegir 8 plazas de entre las que restan (que son $25 - 10 = 15$). Esto se puede hacer de $\binom{15}{7}$ maneras.
- Queda aparcar los 8 coches verdes, pero como únicamente restan 8 plazas, hay una única manera de hacerlo.

Aplicando la regla del producto, deducimos finalmente que hay

$$\binom{25}{10} \times \binom{15}{7} = \frac{25!}{10! \times 15!}\,\frac{15!}{7! \times 8!} = \frac{25!}{10! \times 8! \times 7!} \qquad \text{maneras distintas de aparcarlos.}$$

Alternativamente, podríamos etiquetar los coches $\{A_1, \ldots, A_{10}, B_1, \ldots, B_7, C_1, \ldots, C_8\}$. Ahora que son distinguibles, aparcarlos es formar una lista de 25 posiciones con estos 25 símbolos distintos. Listas de éstas hay 25!. Y ahora corregimos el etiquetado ficticio introducido antes teniendo en cuenta que, dada una de estas listas, cualquier reordenación de los rojos (entre ellos), los azules o los verdes dan lugar al mismo aparcamiento. Y hay 10!, 8! y 7! posibles reordenaciones dentro de cada grupo. La respuesta se obtiene dividiendo 25! entre el producto de estos tres factoriales.

El cociente de factoriales anterior coincide con el coeficiente multinómico $\binom{25}{10,7,8}$.

Al llegar al concesionario, se procede a la matriculación de los vehículos. Una vez matriculados, los coches pasan al aparcamiento del concesionario. El concesionario dispone de un aparcamiento como el de la fábrica (25 plazas, numeradas del 1 al 25).

(b) ¿De cuántas maneras distintas se podrán aparcar los 25 coches en el concesionario?

Solución. Una vez matriculados, los coches son perfectamente distinguibles. Así que decidir cómo aparcarlos es lo mismo que formar una lista de 25 posiciones con 25 símbolos distintos. Es decir, dar una permutación de un conjunto de 25 símbolos. De éstas hay, claro, 25!.

(c) ¿Y si exigimos que los 10 coches del modelo A ocupen las 10 primeras plazas, los 7 del modelo B las siguientes 7 plazas, y los 8 restantes vayan en las últimas 8 plazas?

Solución. Primero decidimos cómo se ordenan los 10 coches azules en las primeras 10 plazas. Hay 10! formas de hacerlo. Ahora, por cada una de éstas formas de situar los azules, tenemos 7! maneras de aparcar los rojos en sus plazas. Finalmente, por cada disposición de azules y rojos anterior, hay 8! maneras de colocar los verdes en sus sitios.

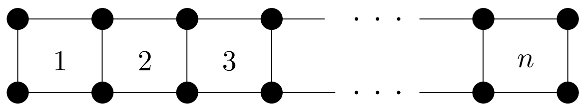
En total, aplicando la regla del producto, tenemos

$$10! \times 7! \times 8! \qquad \text{maneras distintas de aparacarlos.}$$

(d) ¿Y si sólo exigimos que los coches se aparquen "en bloques" (es decir, los 10 del modelo A deben ir juntos, los 7 del B también deben ir seguidos, y lo mismo para los del modelo C)?

Solución. Ahora tenemos el grado de libertad extra de que los bloques (de azules, rojos y verdes) no tienen por qué ir necesariamente en el orden anterior (primero azules, luego rojos y finalmente verdes). Así que primero decidimos el orden de los bloques (hay 3! maneras de hacerlo) y, una vez decidido, contamos las maneras de aparcar los coches (algo que ya se ha hecho en el apartado anterior). En total, hay $3! \times 10! \times 7! \times 8!$ maneras distintas.

3. (2 puntos) (**Ejercicio 14 de la hoja 5**) Calcula el polinomio cromático del grafo "escalera" E_n, que tiene $|V(E_n)| = 2n + 2$ vértices y $|A(E_n)| = 3n + 1$ aristas:



SOLUCIÓN. El grafo E_n es la unión de un grafo E_{n-1} y un grafo C_4, de manera que compartan una arista. Por tanto

$$P_{E_n}(x) = \frac{P_{E_{n-1}}(x) \cdot P_{C_4}(x)}{x(x-1)}.$$

Iterando esta identidad,

$$P_{E_n}(x) = \frac{P_{E_{n-1}}(x) \cdot P_{C_4}(x)}{x(x-1)} = \frac{P_{E_{n-2}}(x) \cdot P_{C_4}(x)}{x(x-1)} \frac{P_{C_4}(x)}{x(x-1)} = P_{E_{n-2}}(x) \frac{[P_{C_4}(x)]^2}{x^2(x-1)^2} =$$
$$= \frac{P_{E_{n-3}}(x) \cdot P_{C_4}(x)}{x(x-1)} \frac{[P_{C_4}(x)]^2}{x^2(x-1)^2} = P_{E_{n-3}}(x) \frac{[P_{C_4}(x)]^3}{x^3(x-1)^3} = \cdots = \frac{P_{E_1}(x) \cdot [P_{C_4}(x)]^{n-1}}{x^{n-1}(x-1)^{n-1}} = \frac{[P_{C_4}(x)]^n}{x^{n-1}(x-1)^{n-1}}.$$

Como

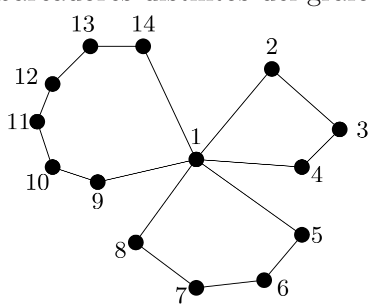
$$P_{C_4}(x) = (x-1)^4 + (x-1) = x(x-1)(x^2 - 3x + 3),$$

resulta finalmente que

$$P_{E_n}(x) = x(x-1)(x^2 - 3x + 3)^n.$$

4. (2 puntos)

(a) Calcula el número de árboles abarcadores distintos del grafo



SOLUCIÓN. El grafo tiene 14 vértices y 16 aristas. Le sobran, pues, 3 aristas para ser un árbol. La propia estructura del grafo nos dice que para formar un árbol abarcador hay que quitar tres aristas, pero de forma especial: una del ciclo con 4 vértices, otra del de 5 y otra más del de 7 vértices. Primero decidimos qué aristas del C_4 quitamos: 4 posibilidades. Una vez hecho esto, escogemos la arista del C_5 que eliminamos: 5 posibilidades. Finalmente, elegimos la arista del C_7: 7 posibilidades. En total, aplicando la regla del producto, hay $4 \times 5 \times 7 = 140$ posibles árboles abarcadores.

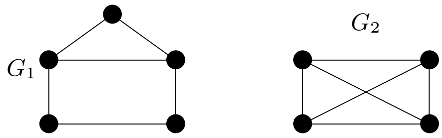
(b) ¿Existen árboles con los vértices $\{1, \ldots, 8\}$ que tengan exactamente dos vértices de grado uno y exactamente un vértice de grado dos? Razona la respuesta.

SOLUCIÓN. Llamemos $(\mathrm{gr}_1, \ldots, \mathrm{gr}_8)$ a la sucesión de grados de los vértices del grafo (ordenados de menor a mayor). Sabemos que, en un árbol, la suma de los grados ha de coincidir con $2|V| - 2$, que es igual a $2 \times 8 - 2 = 14$ en nuestro caso. Tendríamos entonces que

$$14 = \sum_{j=1}^{8} \mathrm{gr}_j = 1 + 1 + 2 + \mathrm{gr}_4 + \mathrm{gr}_5 + \mathrm{gr}_6 + \mathrm{gr}_7 + \mathrm{gr}_8 \implies 10 = \mathrm{gr}_4 + \mathrm{gr}_5 + \mathrm{gr}_6 + \mathrm{gr}_7 + \mathrm{gr}_8\,.$$

Los de la derecha son 5 números mayores o iguales que 3, por lo que no pueden sumar 10.

(c) Para cada uno de los siguientes grafos indica si son eulerianos o no, halla un paseo euleriano, si existe, y calcula el número mínimo de aristas que hay que repetir para conseguir un paseo cerrado que incluya todas las aristas. Razona las respuestas.



SOLUCIÓN. Ninguno de los grafos es euleriano, porque tienen vértices de grado impar.

G_1, como tiene exactamente dos vértices de grado impar, tiene un paseo euleriano (que empieza en uno de esos vértices de grado impar y acaba en el otro). Si al acabar este paseo euleriano recorremos (de nuevo) la arista que une los dos vértices de grado impar, tendremos un paseo cerrado que incluye todas las aristas y que repite únicamente una.

G_2 tiene los cuatro vértices de grado impar. Así que, para conseguir un paseo cerrado que incluya todas las aristas, deberemos repetir al menos dos. Empezamos, por ejemplo, en el vértice superior izquierdo, recorremos el cuadrado en el sentido de las agujas del reloj (estamos de vuelta en el vértice inicial), luego la diagonal hacia la derecha, repetimos la arista vertical de la derecha, luego la diagonal hacia la izquierda, y finalmente volvemos al punto de partida repitiendo la arista vertical de la izquierda.

(d) ¿De cuántas formas distintas se pueden almacenar 2000 canciones distintas en 3 reproductores mp3 idénticos, sin dejar ninguno vacío y sin que ninguna canción esté en más de un reproductor?

SOLUCIÓN. Sólo hay que observar que el número de maneras de almacenar las canciones coincide con el número de formas partir el conjunto de las 2000 canciones (que son distintas) en tres bloques no vacíos (y el orden entre los bloques no es relevante, dado que los reproductores son idénticos). Como bien sabemos, el número de estas particiones es el número de Stirling de segunda especie correspondiente: $S(2000, 3)$.

5. (1 punto) La sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ verifica la siguiente regla de recurrencia:

$$n\,a_n - (5n-5)\,a_{n-1} = 0 \qquad \text{para cada } n \geq 2.$$

Además, $a_1 = 10$.

(a) Calcula los primeros 5 términos de la sucesión. Es decir, los valores de a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5.

SOLUCIÓN. Ya sabemos que $a_1 = 10$. Para los demás, aplicamos sucesivamente la regla de recurrencia:

$$\begin{aligned}
2\,a_2 &= (5\times 2 - 5)a_1 &&\Longrightarrow\quad 2a_2 = 5\times 10 &&\Longrightarrow\quad a_2 = 25\\
3\,a_3 &= (5\times 3 - 5)a_2 &&\Longrightarrow\quad 3a_3 = 10\times 25 &&\Longrightarrow\quad a_3 = \frac{250}{3}\\
4\,a_4 &= (5\times 4 - 5)a_3 &&\Longrightarrow\quad 4a_4 = 15\times \frac{250}{3} = 1250 &&\Longrightarrow\quad a_4 = \frac{1250}{4} = \frac{625}{2}\\
5\,a_5 &= (5\times 5 - 5)a_4 &&\Longrightarrow\quad 5a_5 = 20\times \frac{625}{2} = 6250 &&\Longrightarrow\quad a_5 = \frac{6250}{5} = 1250.
\end{aligned}$$

(b) Observa que la ecuación de recurrencia de los a_n **no** tiene coeficientes constantes. Para resolverla, emplea el siguiente truco: define una nueva sucesión $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ mediante $b_n = na_n$ para cada $n \geq 1$. Resuelve la recurrencia que obtendrás para los b_n y, finalmente, halla una fórmula para los números a_n.

SOLUCIÓN. Obsérvese que $b_n = na_n$ y que $b_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$. Ahora transformamos la regla de recurrencia de la sucesión (a_n) en una recurrencia para la sucesión (b_n):

$$0 = n\underbrace{a_n}_{=b_n/n} - (5n-5)\underbrace{a_{n-1}}_{=b_{n-1}/(n-1)} \quad\Longrightarrow\quad 0 = b_n - (5n-5)\frac{b_{n-1}}{n-1} \quad\Longrightarrow\quad 0 = b_n - 5b_{n-1}\,.$$

Además, el valor inicial es $b_1 = 1 \times a_1 = 10$. La recurrencia para la sucesión (b_n) es lineal de primer orden. Podríamos resolverla con el método de la ecuación característica, pero es más rápido hacerlo por simple iteración:

$$b_n = 5b_{n-1} = 5^2\, b_{n-2} = 5^3\, b_{n-3} = \cdots = 5^{n-1} \underbrace{b_1}_{=10} = 2 \times 5^n\,.$$

Finalmente, $a_n = \dfrac{b_n}{n} = \dfrac{2 \times 5^n}{n}$ para cada $n \geq 1$.

6. (1 punto) Sea $f(x)$ la función generatriz de la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$. Expresa en términos de $f(x)$

(a) $g(x)$, la función generatriz de $(0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Solución. Hemos llamado $f(x)$ a la función generatriz de la sucesión $(a_0, a_1, a_2, \dots)$. Es decir,

$$f(x) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

Si multiplicamos por x, obtenemos

$$x f(x) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \cdots$$

Los coeficientes de esta función son, justamente, $(0, a_0, a_1, a_2, a_3, \dots)$, de manera que $g(x) = x f(x)$.

(b) $h(x)$, la función generatriz de $(a_2, a_3, a_4, a_5 \dots)$.

Solución. Ahora tenemos que desplazar la sucesión "hacia la izquierda" (dos posiciones):

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \quad \Longrightarrow \quad \frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + \cdots$$

Así que $h(x) = (f(x) - a_0 - a_1 x)/x^2$.

(c) $i(x)$, la función generatriz de $(a_0, -a_1, a_2, -a_3, \dots)$.

Solución. La sucesión es como la de la función $f(x)$, pero están cambiados los signos de los coeficientes de las posiciones impares. Pero obsérvese que

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \quad \Longrightarrow \quad f(-x) = a_0 - a_1 x + a_2 x^2 - a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots$$

Así que $i(x) = f(-x)$.

(d) $j(x)$, la función generatriz de $(0, a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \dots)$.

Solución. Son como los coeficientes de $f(x)$, pero aparecen multiplicados por la posición que ocupan. ¡Hay que derivar (y multiplicar por x)!:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots \\ &\Longrightarrow \quad x f'(x) = x(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \cdots) = (a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + 4a_4 x^4 + \cdots) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $j(x) = x f'(x)$.

(e) $k(x)$, la función generatriz de $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, donde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Solución. Ahora tenemos que obtener, como coeficientes, las sumas parciales de los coeficientes de $f(x)$. Esto se consigue, como sabemos, multiplicando por $1/(1-x)$:

$$\frac{1}{1-x} f(x) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} x^j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{j+k} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{n} a_l\right) x^n\,.$$

Así que $k(x) = f(x)/(1-x)$.