

Matemática Discreta
Tercero de Matemáticas UAM, curso 2008-2009
Solucionario del examen final, 10-2-2009

1. (3,5 puntos) Contesta brevemente a las siguientes cuestiones:

a) Prueba combinatoriamente que

$$\binom{2n}{n+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \binom{n}{k+1}.$$

SOLUCIÓN. Nota: es el ejercicio 3.1.17 e) de las notas de MD (archivo `cap3-Combinatoria objetos.pdf`) y lo resolvimos en clase.

El coeficiente binómico de la izquierda cuenta, por ejemplo, el número de maneras de elegir $n+1$ elementos del conjunto $\{1, 2, \dots, 2n\}$.

Vamos a elegir esos $n+1$ elementos con un procedimiento distinto. Primero, dividimos el conjunto total en dos mitades, por ejemplo $A = \{1, \dots, n\}$ y $B = \{n+1, \dots, 2n\}$. Digamos que tomamos k elementos de A para formar parte del subconjunto de $n+1$ elementos. Obsérvese que k va desde 1 hasta n y que tenemos así una partición (en función de k). Deberemos elegir entonces $n+1-k$ de B , lo que nos da, aplicando las reglas de la suma y el producto,

$$\binom{2n}{n+1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n+1-k} \stackrel{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} \binom{n}{n-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} \binom{n}{j}.$$

Alternativa (y más directamente), podemos escribir la suma del enunciado como

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{n-k} \binom{n}{k+1}$$

e interpretarla combinatoriamente como que escogemos $k+1$ de un conjunto (donde ahora k va de 0 a $n-1$), con lo que debemos tomar $n-k$ del otro, para tener el total de $n+1$.

b) Prueba que el polinomio cromático de todo árbol G con n vertices es $p_G(k) = k(k-1)^{n-1}$.

SOLUCIÓN. Está también resuelto en clase. Se puede argumentar por generaciones. Fijamos un vértice del árbol como raíz (da igual cuál, el número de coloraciones no dependerá de cuál elijamos). Lo coloreamos (para lo que tenemos k posibilidades). Ahora coloreamos los vecinos de la raíz (primera generación); para cada uno de ellos tenemos $(k-1)$ posibilidades. En la siguiente generación tenemos, de nuevo, $(k-1)$ posibilidades para cada vértice, etc. En total, $k(k-1)^{n-1}$.

Se puede dar un argumento más formal por inducción, claro.

c) Prueba que, en todo grafo G , el número de vértices con grado impar ha de ser par.

SOLUCIÓN. Nota: es el ejercicio 8.1.8 de las notas de MD (archivo `cap8-grafos1.pdf`) y lo resolvimos en clase.

Sabemos que la suma de los grados de un grafo $G = (V, A)$ coincide con (dos veces) el número de aristas $|A|$:

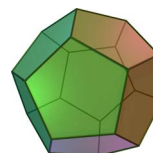
$$2|A| = \sum_{v \in V} gr(v) = \sum_{\substack{v \in V \\ v \text{ con grado par}}} gr(v) + \sum_{\substack{v \in V \\ v \text{ con grado impar}}} gr(v).$$

La primera suma de la derecha es un número par, así que la segunda ha de serlo también. Y esto exige que haya un número par de sumandos.

d) Prueba que el grafo bipartito $K_{2,r}$ (con $r \geq 2$) tiene $r2^{r-1}$ árboles abarcadores distintos.

SOLUCIÓN. Véase el ejemplo 8.2.6 de las notas de MD (archivo `cap8-grafos1.pdf`). Este ejemplo lo resolvimos en clase.

e) El dodecaedro es un sólido platónico con 20 vértices y 30 aristas. Sus 12 caras son pentágonos regulares, que se unen como se muestra en la figura (3 aristas en cada vértice). Justifica por qué el grupo de rotaciones del dodecaedro consta de 60 elementos.



SOLUCIÓN. Sea G el grupo de rotaciones (de los vértices) del dodecaedro. Sabemos que, para cualquier vértice x ,

$$|G| = |\mathcal{O}_G(x)| |\mathcal{E}_G(x)|$$

(tamaño de la órbita de x por tamaño del estabilizador de x). La órbita de cualquier vértice es el conjunto total (por rotaciones se puede pasar de un vértice a cualquier otro). Por su parte, el estabilizador de un vértice está formado por rotaciones cuyo eje pasa por el vértice: hay tres de ellas, de ángulos 120° y 240° (además de la identidad). En total, $20 \times 3 = 60$.

2. (2 puntos) (a) Las autoridades de Castilla-La Mancha han decidido dar un poco de color al añejo molino de viento de la figura. Para ello, han decidido cubrir las cuatro aspas del molino con telas de colores. Disponen de tela de 5 colores distintos. El plan es que, cada día, se cambie la decoración del molino. ¿Cuántos días tardarán, como máximo, en repetir una decoración?



SOLUCIÓN. El número de formas de colorear las 4 aspas con 5 colores es, por supuesto, $5^4 = 625$. Pero hay que considerar la acción del grupo $\mathcal{C}_4$ de rotaciones sobre un conjunto de 4 elementos (las aspas). La identidad tiene 4 ciclos de 1 elementos, las rotaciones de 90° y 270° constan de 1 ciclo de 4 elementos, mientras que la rotación de 180° consta de 2 ciclos de 2. Aplicando el lema de Burnside, el número de coloraciones (con r colores) no equivalentes por la acción de G es

$$\frac{1}{4}[r^4 + r^2 + 2r].$$

Tomando $r = 5$ obtenemos las $660/4 = 165$.

(b) Uno de los consejeros opina que es mejor colorear cada uno de los 16×4 cuadraditos que forman cada aspa. Pero que, para respetar el entorno, mejor será utilizar sólo dos colores, el

blanco y el negro. Además, sugiere pintar la mitad de los 256 cuadraditos totales de negro, y la otra mitad de blanco. Con esta descabellada propuesta, ¿cuántos días se podrá estar sin repetir coloración?

SOLUCIÓN. Seguimos con el grupo C_4 , pero ahora actuando sobre los 256 cuadraditos. En esta acción, la identidad consta de 256 ciclos de 1, las rotaciones de 90° y 270° constan de 64 ciclos de 4 elementos, mientras que la rotación de 180° consta de 128 ciclos de 2. La indicatriz de ciclos, es entonces,

$$\frac{1}{4}[y_1^{256} + y_2^{128} + 2y_4^{64}].$$

Como hay dos colores, digamos b y n , el teorema de Pólya nos dice que la respuesta está en el coeficiente de $b^{128} n^{128}$ de

$$\frac{1}{4}[(b+n)^{256} + (b^2+n^2)^{128} + 2(b^4+n^4)^{64}].$$

Pero

$$\begin{aligned}(b+n)^{256} &= \sum_{k=0}^{256} \binom{256}{k} b^k n^{256-k}, \\ (b^2+n^2)^{128} &= \sum_{k=0}^{128} \binom{128}{k} b^{2k} n^{2(128-k)}, \\ (b^4+n^4)^{64} &= \sum_{k=0}^{64} \binom{64}{k} b^{4k} n^{4(64-k)}.\end{aligned}$$

Identificando los términos en $b^{128} n^{128}$ llegamos a la respuesta:

$$\frac{1}{4} \left[\binom{256}{128} + \binom{128}{64} + 2 \binom{64}{32} \right].$$

3. (1 punto) Calcula el valor de la suma

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} 8^k.$$

SOLUCIÓN. El teorema del binomio nos dice que, para todo x ,

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Derivando (y multiplicando por x),

$$nx(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k.$$

Tómese entonces $x = 8$ y obtenemos la respuesta: $8n 9^{n-1}$.

Se puede resolver el problema calculando la función generatriz de estas sumas, empleando el método “curalotodo”, para luego desarrollar en serie de potencias, pero... desde luego es mucho más aparatoso.

4. (1 punto) Sea $A = \{1, \dots, n\}$. Calcula el número de k -subconjuntos que no contienen números consecutivos.

SOLUCIÓN. Nota: es el ejercicio 3.1.15 de las notas de MD (archivo `cap3-Combinatoria objetos.pdf`) y lo resolvimos en clase.

Primero, un k -subconjuntos con esas características se puede traducir en una lista de ceros y unos, longitud n , con exactamente k unos, y sin unos consecutivos.

Podemos contar este tipo de listas con el siguiente argumento: escribimos los k unos e imaginamos unas cajas a derecha e izquierda de ellos. Hay $k + 1$ cajas en total. En las cajas situamos los ceros (bolas indistinguibles), una cantidad x_j en cada caja j . La primera y la última pueden quedar vacías, pero las “intermedias” han de llevar al menos un cero. Así que el número de soluciones del problema del enunciado coincide con el número de soluciones de

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n \\ x_1, x_{k+1} \geq 0, x_2, \dots, x_k \geq 1 \end{cases}$$

La respuesta final es $\binom{n-k+1}{k}$.

5. (1 punto) Sea G un grafo con $V(G) \subseteq \{1, \dots, n\}$ con $|V(G)| = v$ y $|A(G)| = a$. ¿Cuántos grafos distintos con conjunto de vértices $\subseteq \{1, \dots, n\}$ contienen a G como subgrafo?

SOLUCIÓN. Nota: es el ejercicio 8.1.18 de las notas de MD (archivo `cap8-grafos1.pdf`) y lo resolvimos en clase.

Hay $n - v$ posibles nuevos vértices. Elegimos k de ellos para formar parte del grafo que queremos construir. Esto se puede hacer de $\binom{n-v}{k}$ maneras. Nótese que se trata de una partición, donde k va desde 0 hasta $n - v$. Ahora, para cada k , añadimos aristas:

- entre vértices de G . Hay $\binom{v}{2} - a$ aristas posibles. Elegirlas o no nos da un factor $2^{\binom{v}{2}-a}$.
- Entre los nuevos k vértices. Hay $\binom{k}{2}$ aristas posibles. Elegirlas o no nos da un factor $2^{\binom{k}{2}}$.
- Entre los vértices de G y los nuevos k vértices. Hay kv aristas posibles. Elegirlas o no nos da un factor 2^{kv} .

En total, aplicando las reglas de la suma y el producto, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{n-v} \binom{n-v}{k} 2^{\binom{v}{2}-a} 2^{\binom{k}{2}} 2^{kv}.$$

6. (1,5 puntos) (a) Halla la función generatriz de la sucesión de números (a_n) definida mediante

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^n \quad \text{para } n \geq 2.$$

SOLUCIÓN. Es un cálculo directo. Si llamamos $f(x)$ a la función generatriz de los (a_n) ,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2} + 2^n) x^n \\ &= 1 + 3x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n \\ &= 1 + 3x + x \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}}_{=\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^m = f(x) - a_0} + x^2 \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2}}_{=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = f(x)} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} 2^n x^n}_{=\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n - 1 - 2x = \frac{1}{1-2x} - 1 - 2x}, \end{aligned}$$

de forma que

$$(1 - x - x^2)f(x) = 1 + 3x - x + \frac{1}{1-2x} - 1 - 2x = \frac{1}{1-2x}.$$

Finalmente,

$$f(x) = \frac{1}{(1-x-x^2)(1-2x)}.$$

(b) A la vista de la función generatriz obtenida, ¿qué sabrías decir sobre el comportamiento asintótico cuando $n \rightarrow \infty$ de los a_n ?

SOLUCIÓN. En este caso, podemos calcular directamente una fórmula para los coeficientes, desarrollando $f(x)$ en serie de potencias, mediante fracciones simples (o resolviendo la recurrencia del enunciado). Es un cálculo pesadote, pero se obtiene que

$$f(x) = \frac{4}{1-2x} - \left(\frac{7\sqrt{5}+15}{10}\right) \frac{1}{1-\tau x} + \left(\frac{7\sqrt{5}-15}{10}\right) \frac{1}{1+x/\tau},$$

donde τ es la razón áurea ($\tau = (1 + \sqrt{5})/2$). De donde

$$a_n = 4 \cdot 2^n - \left(\frac{7\sqrt{5}+15}{10}\right) \tau^n + \left(\frac{7\sqrt{5}-15}{10}\right) \left(-\frac{1}{\tau}\right)^n$$

Nótese que $\tau \approx 1,618$ y que $1/\tau \approx 0,618$. De manera que podemos concluir que $a_n \sim 2^{n+2} + O(\tau^n)$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Aunque, sin necesidad de calcular explícitamente los coeficientes, podemos llegar a un resultado análogo. Obsérvese que los polos de $f(x)$ son $1/2$, $-\tau$ y $1/\tau$. El polo $1/2$, el más cercano al origen, nos dará el término principal del desarrollo asintótico. Podemos entonces escribir

$$f(x) = [f(x) - g(x)] + g(x), \quad \text{donde} \quad g(x) = \frac{4}{1-2x}$$

($g(x)$ se calcula evaluando la parte principal de $f(x)$ en el $1/2$). La función entre corchetes es holomorfa en el disco centrado en el origen y de radio $1/\tau$; los coeficientes de $g(x)$ son los números $4 \cdot 2^n$. Lo que nos lleva a concluir, directamente, que, para todo $\varepsilon > 0$,

$$a_n \sim 2^{n+2} + O((\tau + \varepsilon)^n) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$