Matemática Discreta
Tercero de Matemáticas UAM, curso 2009-2010
Examen final, 1-2-2010

1. (2 puntos) Considera la sucesión de números $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ definida mediante

$$\begin{cases} a_n = 6a_{n-2} - 9a_{n-4} & \text{para } n \geq 4; \\ a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 6, a_3 = 12 \end{cases}$$

a) Halla la función generatriz de los números a_n.

b) Deduce el valor de a_{101}.

Solución. a) Calculamos la función generatriz de los a_n con las manipulaciones habituales:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n = 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + \sum_{n=4}^{\infty}(6a_{n-2} - 9a_{n-4})\, x^n \\ &= 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 6x^2 \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} a_{n-2}\, x^{n-2}}_{=f(x)-1-2x} - 9x^4 \underbrace{\sum_{n=4}^{\infty} a_{n-4}\, x^{n-4}}_{=f(x)} \\ &= 1 + 2x + 6x^2 + 12x^3 + 6x^2 f(x) - 6x^2 - 12x^3 - 9x^4 f(x) = 1 + 2x + 6x^2 f(x) - 9x^4 f(x) \\ \Longrightarrow \quad & f(x)(1 - 6x^2 + 9x^2) = 1 + 2x \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{1 + 2x}{1 - 6x^2 + 9x^2}. \end{aligned}$$

b) Tenemos que desarrollar en serie de potencias $f(x)$, para luego localizar el coeficiente de x^{101}. Se pueden utilizar fracciones simples, claro, pero es mucho más sencillo observar que el denominador es un cuadrado y utilizar el (conocido) desarrollo de $1/(1-z)^{m+1}$:

$$f(x) = \frac{1 + 2x}{(1 - 3x^2)^2} = (1 + 2x) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} (3x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) 3^n\, x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) 3^n\, x^{2n+1}$$

Obsérvese (en la recurrencia) que la sucesión (a_n) está formada por dos sucesiones, los de índice par y los de índice en impar (y cada una va "por su cuenta"). Si se pidiera una fórmula general para a_n, habría que separar los dos casos (n par e impar), pero como nos piden el coeficiente a_{101}, basta leerlo directamente de la expresión anterior: es el caso $n = 50$ de la suma de la derecha,

$$a_{101} = 2 \cdot 51 \cdot 3^{50}\,.$$

2. (3 puntos) El profesor de la asignatura, algo harto del caos que se ha apoderado de su despacho, decide un día ordenar sus libros en una estantería. Tiene 12 libros (distintos) de Análisis, 15 de Probabilidad, 10 de Geometría y 8 de Teoría de Números. ¿De cuántas maneras podrá colocarlos

a) si los sitúa ordenados por disciplinas, y éstas por orden alfabético (es decir, primero los de Análisis, luego los de Geometría, etc.)

b) Si sólo quiere que los de cada disciplina vayan juntos.

c) Si, por extrañas razones, no desea ver dos libros de Análisis seguidos.

Solución. Las respuestas de a) y b) son obvias. En el primer caso, ya ordenados por disciplinas, sólo nos queda permutar dentro de cada bloque: $12! \cdot 15! \cdot 10! \cdot 8!$ posibilidades.

En el segundo caso tenemos, además, la libertad de permutar los bloques: $4!{\cdot}12!{\cdot}15!{\cdot}10!{\cdot}8!$ posibilidades.

Vamos con el apartado c). Contaremos en dos pasos: primero decidiremos cuál es la estructura en la que se disponen los libros (que en los apartados a) y b) ya estaba fijada), para luego proceder a permutar los libros en los bloques correspondientes.

Para fijar la citada estructura, lo único que tenemos que hacer es decidir cuántos libros van entre cada dos de Análisis:

$$\underset{x_1}{\sqcup}\bullet\underset{x_2}{\sqcup}\bullet\underset{x_3}{\sqcup}\bullet\underset{\cdots}{\sqcup}\bullet\underset{\cdots}{\sqcup}\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\sqcup\bullet\underset{x_{12}}{\sqcup}\bullet\underset{x_{13}}{\sqcup}$$

Hay tantas estructuras como la que se dibuja en el esquema anterior como soluciones del problema

$$\left\{\begin{array}{c} x_1 + x_1 + \cdots + x_{13} = 33 \\ x_1, x_{13} \geq 0 \\ x_2, x_3, \ldots x_{12} \geq 1 \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad \binom{33+13-1-11}{13-1} = \binom{34}{12} \text{ soluciones.}$$

Ahora, para cada una de ellas, procedemos a permutar los libros: los de Análisis entre sí (12! posibilidades) y los restantes (que aquí desempeñan el mismo papel) entre sí: 33! posibilidades. En total, hay

$$12! \cdot 33! \cdot \binom{34}{12}.$$

3. (1 punto) Demuestra que el número de aristas de un grafo G es, por lo menos, $\binom{\chi(G)}{2}$.

Solución. (Este ejercicio forma parte de las hojas de problemas del curso). Si el grafo G tiene número cromático $\chi(G)$, entonces hay (al menos) una coloración de sus vértices que emplea justamente $\chi(G)$ colores. Tomemos una de estas coloraciones: en ella, los vértices quedan agrupados en $\chi(G)$ clases (los que van de rojo, los que van de azul, etc.). Entre cada una de las parejas de clases ha de haber, al menos, una arista (pues de lo contrario podríamos pintar los vértices de los dos bloques del mismo color). Y como hay $\binom{\chi(G)}{2}$ parejas de clases... pues ya está.

4. (1 punto) Una colección consta de 10 cromos distintos. Durante 20 días vamos a ir cada mañana al kiosko a comprar uno. ¿Cuál es la probabilidad de que completemos la colección justamente (y no antes) el último día?

Nota: suponemos que los cromos aparecen con la misma probabilidad, así que basta calcular el cociente de casos favorables entre casos posibles.

Solución. Contamos primero los casos posibles. Son listas de longitud 20, en cuyas posiciones puede ir cualquiera de los 10 símbolos (los cromos). Así que hay 10^{20}.

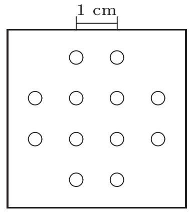
¿Qué estructura tienen las listas que queremos contar como “favorables”? Siguen siendo listas de longitud 20, formadas con los 10 símbolos, en las que en la última posición aparece un símbolo (cromo) que no ha salido antes (el que completa la colección). En las 19 posiciones anteriores han de estar *todos* los demás símbolos. Las contamos con el siguiente proceso:

- decidimos primero qué símbolo (cromo) cierra la colección: 10 posibilidades.
- Y ahora tenemos que contar cuántas listas de 19 posiciones hay que contengan (todos) los símbolos restantes. Pero esto es lo mismo que hacer una aplicación *sobreyectiva* entre el conjunto de 19 elementos (las posiciones de la lista) y uno de 9 elementos (los cromos que van en ellas). Alternativamente, hay que repartir 19 elementos distintos en 9 cajas distintas, sin que queden cajas vacías. La respuesta es $9! \cdot S(19, 9)$.

Así que la probabilidad pedida es

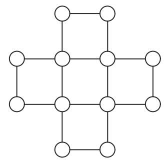
$$\frac{10 \cdot 9! \cdot S(19,9)}{10^{20}}.$$

5. (3 puntos) Obsérvese el diseño sobre una cartulina cuadrada que se muestra en la figura de la derecha. En cada uno de los circulitos podemos situar un símbolo del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$.



a) Digamos, para empezar, que la cartulina está fija sobre la mesa. ¿Cuántas tarjetas distintas se podrán diseñar si no queremos que haya símbolos iguales en circulitos que disten entre sí 1 cm?

Solución.
Se trata, simplemente, de calcular el polinomio cromático $P_G(k)$, evaluado en $k=5$, del grafo G que aparece a la derecha. Se trata de cinco grafos C_4 que comparten una arista cada uno de ellos con el resto de la estructura. "Separando" sucesivamente estos cuadrados con el procedimiento habitual (dos grafos que comparten una arista) llegamos a que



$$P_G(k) = \frac{\big[P_{C_4}(k)\big]^5}{k^4(k-1)^4} = \frac{\big[(k-1)^4+(k-1)\big]^5}{k^4(k-1)^4} \quad\Longrightarrow\quad P_G(5) = \frac{[4^4+4]^5}{5^4 4^4}.$$

b) Nos olvidamos de las restricciones del apartado anterior. Ahora identificamos cartulinas que se obtengan una de otra por rotaciones sobre el plano del papel. ¿Cuántas podremos diseñar?

Solución. El grupo G de rotaciones tiene cuatro elementos (la identidad σ_0 y las rotaciones σ_1 (de 90), σ_2 (de 180) y σ_3 (de 270 grados). En su acción sobre los 12 circulitos de la figura, σ_0 define 12 ciclos de longitud 1; σ_1 y σ_3 definen (cada una de ellas) 3 ciclos de 4. Por último, σ_2 define 6 ciclos de 2. Aplicando el lema de Burnside, deducimos que el número de tarjetas (no equivalente por G) es

$$\frac{1}{4}\big[5^{12}+2\cdot 5^3+5^6\big] = 61039125\,.$$

c) Seguimos con las identificaciones por rotación del apartado anterior. Pero supongamos que situamos los 5 símbolos en los circulitos aleatoriamente (cada símbolo va a cada circulito con igual probabilidad). ¿Con qué probabilidad obtendremos, con este procedimiento, una cartulina con 6 unos, 4 doses y 2 treses?

Solución. Aprovechando el análisis de ciclos del apartado anterior, obtenemos la indicatriz de ciclos:

$$J_G(y_1,\dots,y_{12}) = \frac{1}{4}\Big[y_1^{12}+2\cdot y_4^3+y_2^6\Big].$$

Y, vía el teorema de Pólya, el inventario de coloraciones será

$$I_\Omega(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = \frac{1}{4}\Big[(x_1+\cdots+x_5)^{12}+2\cdot(x_1^4+\cdots+x_5^4)^3+(x_1^2+\cdots+x_5^2)^6\Big].$$

Buscamos el coeficiente de $x_1^6x_2^4x_3^2$ en este inventario. El primer término es, vía el multinomio de Newton,

$$(x_1+\cdots+x_5)^{12} = \sum_{j_1,\dots,j_5}\binom{12}{j_1,\dots,j_5}x_1^{j_1}\cdots x_5^{j_5} \quad\longrightarrow\quad \text{coeficiente de } x_1^6x_2^4x_3^2 \text{ es } \binom{12}{6,4,2,0,0} = \frac{12!}{6!\cdot 4!\cdot 2!}.$$

El segundo término no contribuye a este coeficiente (todas las potencias son múltiplos de 4), pero del tercero obtenemos una contribución

$$(x_1^2+\cdots+x_5^2)^6 = \sum_{j_1,\dots,j_5}\binom{6}{j_1,\dots,j_5}x_1^{2j_1}\cdots x_5^{2j_5} \quad\longrightarrow\quad \text{coeficiente de } x_1^6x_2^4x_3^2 \text{ es } \binom{6}{3,2,1,0,0} = \frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!}.$$

La probabilidad pedida (caso favorables entre posibles) resulta ser

$$\frac{\frac{1}{4}\Big[\frac{12!}{6!\cdot4!\cdot2!}+\frac{6!}{3!\cdot2!\cdot1!}\Big]}{\frac{1}{4}\big[5^{12}+2\cdot5^3+5^6\big]} = \frac{3480}{61039125} \approx 0{,}005\,\%.$$

(el denominador es el calculado en el apartado b).