Economía y finanzas matemáticas
Cuarto curso, licenciatura en Matemáticas, UAM, 2011-2012

Examen parcial, 28-3-2012

1. (2 puntos) Los datos de mercado son los siguientes: un cierto subyacente $\mathcal{S}$ vale hoy S_0 euros. El tipo de interés continuo es R. El precio de una call con strike $2K$ y vencimiento T es c euros.

Formamos la siguiente cartera:

- tomamos una posición larga en un contrato forward sobre el subyacente $\mathcal{S}$ con strike K y vencimiento T (es decir, compraremos el subyacente a precio K en tiempo T);
- compramos una put sobre $\mathcal{S}$ con strike $2K$ y vencimiento T;
- y pedimos prestados Ke^{-Rt} euros.

¿Cuánto costará, en términos de los datos de mercado, formar hoy esta cartera?

Solución: lo que cuesta la call, c.

2. (2 puntos) Un cierto instrumento financiero, que cuesta hoy p euros, pagará $\frac{4}{3}p$ euros dentro de 1 año y otros $\frac{4}{3}p$ euros dentro de 2 años. Calcula su TIR.

Solución: TIR$=100\,\%$.

3. (2 puntos) Modelo matricial con dos escenarios y dos activos básicos: un subyacente S y la cuenta bancaria CB. El subyacente vale hoy S_0 euros. En el tiempo $t=1$ año puede tomar los valores S_0+u y S_0-d, donde u y d son números positivos. El tipo (anual, continuo) libre de riesgo es de un $R\,\%$. Halla la probabilidad de valoración si tomamos como numerario la CB.

Solución: $p=\frac{(e^R-1)\,S_0+d}{u+d}$.

4. (4 puntos) En un modelo matricial con tres estados $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$ consideramos, como activos básicos, los tres siguientes:

- el bono;
- un subyacente que toma, respectivamente, los valores S_1, S_2 y S_3 en cada uno de los escenarios (donde $0<S_1<S_2<S_3$);
- una call sobre ese subyacente con strike S_2.

a) Supongamos que los precios de los tres activos hoy son, respectivamente, B_0, S_0 y c (los tres positivos). Determina las condiciones que deben cumplir estos precios para que no haya oportunidades de arbitraje en el modelo (por ejemplo, tomando el bono como numerario y hallando una probabilidad de valoración asociada).
b) En el caso de que no haya oportunidades de arbitraje, ¿es única esa probabilidad de valoración asociada al bono como numerario? ¿Qué significa eso?

Solución:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= \frac{S_0-c-B_0S_2}{B_0(S_1-S_2)}\\
p_2 &= 1-p_1-p_3\\
p_3 &= \frac{c}{B_0(S_3-S_2)}
\end{aligned}
$$

Los tres números suman 1, por construcción, y las condiciones sobre c, B_0 y S_0 (para que no haya arbitraje) son las que se obtienen de exigir que p_1 y p_2 sean >0 (p_3 lo es, por las condiciones del enunciado). El mercado, además, es completo.