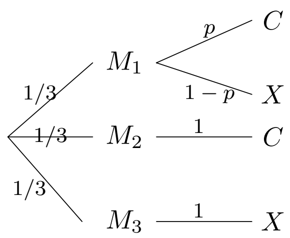
Solucionario de la hoja especial de problemas para Probabilidad I
(10 de diciembre de 2003)

Nota bene: En estas páginas aparecerán las respuestas a los ejercicios. Y algunas de las distintas maneras de abordarlos (pero podría haber otras igualmente correctas).

1. Tenemos tres monedas: una normal, otra con dos caras, y la tercera, con dos cruces. Se ha escogido una moneda al azar (con igual probabilidad) y ha salido cara. ¿Cuál es la probabilidad de haber escogido la moneda normal?

• Solución: El procedimiento aleatorio consta de dos pasos: en el primero se sortea qué moneda se usa, el segundo es el lanzamiento de la moneda seleccionada, como se indica en el esquema de la derecha. En él ya hemos indicado las probabilidades de cada una de las posibilidades. *A priori*, la probabilidad de escoger la moneda M_1 es $1/3$. Pero esta probabilidad cambia para adaptarse a la información que se nos revela (ha salido cara). El cálculo de esta nueva probabilidad es una aplicación directa del teorema de Bayes (y la regla de probabilidad total). Abreviemos por C y X los sucesos "sale cara" y "sale cruz", respectivamente, y por M_i al suceso "se ha elegido la moneda M_i", para $i = 1, 2, 3$. La respuesta es



$$\mathbf{P}(M_1|C) = \frac{\mathbf{P}(C|M_1)\,\mathbf{P}(M_1)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{\mathbf{P}(C|M_1)\,\mathbf{P}(M_1)}{\mathbf{P}(C|M_1)\,\mathbf{P}(M_1) + \mathbf{P}(C|M_2)\,\mathbf{P}(M_2) + \mathbf{P}(C|M_3)\,\mathbf{P}(M_3)}$$

$$= \frac{p \times 1/3}{p \times 1/3 + 1 \times 1/3 + 0 \times 1/3} = \frac{p}{1+p}\,.$$

Si M_1 es una moneda equilibrada, $p = 1/2$, $\mathbf{P}(M_1|C) = 1/3$, que coincide con la $\mathbf{P}(M_1)$ original (pero $\mathbf{P}(M_1|C) \neq \mathbf{P}(M_1)$ si $p \neq 1/2$). Siguiendo con la moneda equilibrada, nótese que $\mathbf{P}(M_2|C) = 2/3$ y $\mathbf{P}(M_3|C) = 0$.

2. Se celebra un *casting* televisivo en dos sedes, Madrid y Sevilla. En Madrid se seleccionan 20 chicos y 30 chicas, que reunimos en una sala. Allí se mezclan alegremente (esto es, al azar) y se colocan en fila india. Lo mismo hacemos en Sevilla, donde se han seleccionado 30 chicos y 50 chicas.

Lanzamos una moneda (equilibrada): si sale cara, llamamos a Sevilla y escogemos al candidato que ocupe la primera posición de la lista. Si sale cruz, hacemos lo mismo, pero en Madrid.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que el candidato elegido sea un chico?

• Solución: El procedimiento sugiere que, una vez elegida la sede, todos los candidatos de allí tienen la misma probabilidad de salir, de manera que las probabilidades se calcularán como cociente de casos favorables entre posibles. Digamos que Chico, Chica, M y S representan los sucesos "el candidato elegido es chico" (respectivamente, chica, de Madrid, de Sevilla). Por probabilidad total,

$$\mathbf{P}(\text{Chico}) = \mathbf{P}(\text{Chico}|M)\mathbf{P}(M) + \mathbf{P}(\text{Chico}|S)\mathbf{P}(S) = \frac{20}{50} \times \frac{1}{2} + \frac{30}{80} \times \frac{1}{2} = \frac{31}{80}\,.$$

(b) Juan González es uno de los seleccionados en Sevilla. ¿Cuál es la probabilidad de que sea el candidato finalmente elegido?

• Solución: Abreviemos con JG el suceso "Juan González es el candidato elegido":

$$\mathbf{P}(\text{JG}) = \mathbf{P}(\text{JG}|M)\mathbf{P}(M) + \mathbf{P}(\text{JG}|S)\mathbf{P}(S) = 0 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{80} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{160}\,.$$

(c) Se ha efectuado el proceso de elección del candidato final, que resulta ser una chica. ¿Con qué probabilidad será "madrileña"?

• SOLUCIÓN: *A priori*, y conforme al procedimiento elegido, hay probabilidad 1/2 de elegir a un candidato "madrileño". Pero, a la vista de la información disponible (ha sido elegida una chica), resulta que

$$\mathbf{P}(M|\text{Chica}) = \frac{\mathbf{P}(\text{Chica}|M)\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}(\text{Chica})} = \frac{\frac{30}{50} \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{31}{80}} = \frac{24}{49} \approx 0{,}49\,,$$

algo menor del 50 % original. Podríamos haber calculado el valor del denominador con el argumento de probabilidad total habitual, pero en este caso podemos ahorrárnoslo, porque ya sabemos que $\mathbf{P}(\text{Chico})$ es, por el apartado (a), de 31/80.

(d) Ahora cambiamos el procedimiento: reunimos a *todos* los seleccionados en un hotel de Barcelona, los mezclamos y colocamos en fila india; y elegimos al candidato que ocupe la primera posición. La probabilidad de que Juan González haya sido el elegido, ¿coincide con la del apartado (b)? Y la probabilidad de que el candidato sea chico, ¿coincide con la del apartado (a)? Medita sobre el asunto.

• SOLUCIÓN: Ahora tenemos a 130 personas, 50 chicos y 80 chicas, todas en la misma sede. Las respuestas son

$$\mathbf{P}(\text{JG}) = \frac{1}{130} \quad \text{y} \quad \mathbf{P}(\text{Chico}) = \frac{5}{13}\,.$$

Juan González mejora sus expectativas con respecto al procedimiento anterior (¡recordemos que estaba en la sede más numerosa!). Los chicos, en cambio, han perdido (muy ligeramente) posibilidades, pues en la sede menos numerosa, Madrid, había una mayor proporción de chicos que en la otra.

3. (a) Hacemos el siguiente experimento: lanzamos tres monedas y contamos el número X de caras. Posteriormente, lanzamos X dados y llamamos Y a la suma de los resultados obtenidos. ¿Cuánto vale $\mathbf{E}(Y)$?

• SOLUCIÓN: Suponemos que las tres monedas son idénticas y, por hacer el cálculo con la mayor generalidad posible, digamos que tienen probabilidad p de salir cara. En estas circunstancias, la variable aleatoria X puede tomar los valores $\{0,1,2,3\}$ y su función de masa es la de una binomial $Bin(3,p)$: $\mathbf{P}(X=k) = \binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k}$. Los dados que utilizamos en la segunda parte del experimento son también idénticos y suponemos que están equilibrados: los resultados de un dado son $\{1,2,3,4,5,6\}$, cada uno de ellos con probabilidad 1/6. Aunque, como veremos, no representaría problema alguno considerar dados cargados, con tal de que conociéramos el valor medio obtenido en un lanzamiento. Condicionamos a los diferentes valores de X (al número de caras que salen en el primer experimento):

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{j=0}^{3} \mathbf{E}(Y|X=j)\mathbf{P}(X=j) = \sum_{j=0}^{3} \mathbf{E}(Y|X=j)\binom{3}{j} p^j (1-p)^{3-j}\,.$$

Sólo resta calcular los números $\mathbf{E}(Y|X=j)$ para cada $j=0,1,2,3$. El primer caso es obvio: $\mathbf{E}(Y|X=0)=0$. El segundo es fácil de calcular, pues lanzamos un único dado:

$$\mathbf{E}(Y|X=1) = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}\,.$$

¿Y para $\mathbf{E}(Y|X=2)$? Al lanzar dos dados, los valores posibles son $\{2,3,\ldots,12\}$. Pero, ¡atención!, ya no son equiprobables pues, por ejemplo, el 2 sólo se obtiene con $1+1$, mientras que el 3 se obtiene de dos formas distintas, $1+2$ y $2+1$. Podríamos calcular la probabilidad con que se obtiene cada valor, pero el cálculo es engorroso, y más pensando en que luego lo tenemos que hacer con tres dados (o con hasta 1457 dados en el segundo apartado). Pero el resultado de lanzar dos dados (idénticos) lo podemos modelar como la suma de dos variables aleatorias (iguales) Y_1 y Y_2, cada una de las cuales representa el resultado de uno de ellos. Y, claro,

$$\mathbf{E}(Y_1+Y_2) = \mathbf{E}(Y_1) + \mathbf{E}(Y_2) = 2 \times \frac{7}{2}\,.$$

Para tres dados, el valor medio es, simplemente, el triple que el valor medio de uno. Así que

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{j=0}^{3} \mathbf{E}(Y|X=j)\binom{3}{j}p^j(1-p)^{3-j} = \sum_{j=0}^{3} \frac{7j}{2}\binom{3}{j}p^j(1-p)^{3-j} = \frac{7}{2}\sum_{j=0}^{3} j\binom{3}{j}p^j(1-p)^{3-j}.$$

La suma de la derecha no es sino la esperanza de una $Bin(3,p)$, esto es, $3p$. De manera que la respuesta final es

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{7}{2}\,3p\,,$$

que, si $p = 1/2$ (monedas equilibradas), resulta valer $21/4$.

(b)* (opcional) Si lanzáramos 1457 monedas, ¿cuánto valdría $\mathbf{E}(Y)$?

• Solución: Con las observaciones del apartado anterior, es claro que

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{7}{2}\,1457\,p\,.$$

4. (a) Un cierto sistema está compuesto por dos subsistemas, A y B. Para que el sistema funcione, los subsistemas A y B tiene que estar *ambos* operativos. Tras un estudio detallado, modelamos la duración (en horas) de los subsistema A y B como variables aleatorias geométricas (independientes) de parámetro $p = 0{,}02$. ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema completo funcione al menos 30 horas?

• Solución: Un cálculo previo (ya hecho en clase) resulta útil: una variable aleatoria X sigue una geométrica de parámetro p si toma los valores $1, 2, 3, \ldots$ con probabilidades

$$\mathbf{P}(X = j) = p(1-p)^{j-1} \quad \text{para cada } j = 1, 2, 3, \ldots$$

De donde es fácil obtener que $\mathbf{P}(X \geq j) = (1-p)^{j-1}$ para cada $j = 1, 2, 3, \ldots$.
Llamemos X_A y X_B a las duraciones respectivas de los subsistemas A y B. Para que el sistema funcione, necesitamos que el valor de *ambas* variables sea ≥ 30. O, si queremos, que $\min\{X_A, X_B\} \geq 30$. Así que

$$\mathbf{P}(\text{sistema funcione} \geq 30 \text{ horas}) = \mathbf{P}(\min\{X_A, X_B\} \geq 30) = \mathbf{P}(X_A \geq 20\,,\, X_B \geq 30)$$

Las variables X_A y X_B son independientes, así que la última probabilidad es, simplemente, el producto de las probabilidades de los dos sucesos. Ambas variables siguen geométricas de parámetros $p = 0{,}02$:

$$\mathbf{P}(\text{sistema funcione} \geq 30 \text{ horas}) = \mathbf{P}(X_A \geq 30)\mathbf{P}(X_B \geq 30) = \big[0{,}98^{29}\big]^2 = 0{,}98^{58} \approx 0{,}3098\,.$$

(b) Ahora rediseñamos nuestro sistema, de manera que el subsistema A está siempre activo, mientras que el B es un subsistema de refuerzo, que se activa en cuanto A falla (y sólo entonces). ¿Cuál es la probabilidad de que el sistema completo funcione al menos 20 horas?

• Solución: Ahora la variable aleatoria de interés es $X_A + X_B$, que queremos valga ≥ 20. Para calcular $\mathbf{P}(X_A + X_B \geq 20)$ condicionamos sobre los posibles valores de X_A:

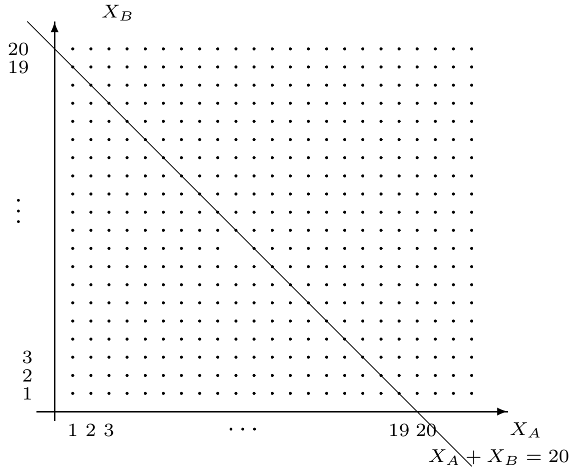
$$\mathbf{P}(X_A + X_B \geq 20) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_A + X_B \geq 20 | X_A = j)\mathbf{P}(X_A = j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(X_B \geq 20 - j)\mathbf{P}(X_A = j)$$

$$= \sum_{j=1}^{19} \mathbf{P}(X_B \geq 20 - j)\mathbf{P}(X_A = j) + \sum_{j=20}^{\infty} \underbrace{\mathbf{P}(X_B \geq 20 - j)}_{=1}\mathbf{P}(X_A = j)$$

$$= \sum_{j=1}^{19} \mathbf{P}(X_B \geq 20 - j)\mathbf{P}(X_A = j) + \mathbf{P}(X_A \geq 20)\,.$$

La última igualdad recoge el hecho casi obvio de que si $X_A \geq 20$, entonces el sistema funciona sin duda, independientemente de lo que vaya a valer X_B. Pero cuando sea $X_A < 20$, necesitamos que la otra variable aleatoria, X_B, tome un valor "suficientemente" alto. Sustituyendo cada una de las probabilidades por sus valores respectivos, obtenemos que

$$\mathbf{P}(X_A + X_B \geq 20) = (1-p)^{19} + \sum_{j=1}^{19} (1-p)^{20-j-1}\, p(1-p)^{j-1} = (1-p)^{19} + p \sum_{j=1}^{19} (1-p)^{18}\,.$$



La respuesta, finalmente, es que el sistema funcionará al menos 20 horas con probabilidad $(1-p)^{19} + 19\,p(1-p)^{18}$. Sustituyendo el valor $p = 0,02$, la probabilidad resulta ser del $94,54\,\%$. A la derecha dibujamos una interpretación geométrica. Los valores del par de variables (X_A, X_B) son los puntos de coordenadas naturales. La función de masa conjunta (en este caso, no es más que el producto de las individuales) asigna probabilidad a cada uno de esos puntos del retículo. Sumando en todo el cuadrante, obtenemos 1. La pregunta del ejercicio no es más que calcular la probabilidad de los puntos que están sobre o por encima de la recta $X_A + X_B = 20$. Este cálculo lo hemos dividido en dos partes: la franja de los puntos de primera coordenada ≥ 20, y la región donde $X_A < 20$ que queda sobre o por encima de la recta.

5. La sobrina de uno de los profesores de la asignatura, Alba, tiene por costumbre llevar los bolsillos llenos de chucherías. Supongamos que lleva n chucherías en el bolsillo izquierdo, y otras n en el derecho. Cada vez que tiene hambre, se lleva la mano a uno de los bolsillos (con igual probabilidad uno que otro) y, si éste no está vacío, saca una chuchería y se la come.

La primera vez que encuentra vacío un bolsillo, en el otro todavía le quedan un cierto número de chucherías (o quizás ninguna); llamemos X a ese número. Comprobar que

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}}\,, \qquad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

• Solución: ¡Observemos primero que X podría tomar el valor 0! Por ejemplo, en el caso en que ambos bolsillos se vayan visitando alternativamente empezando, por ejemplo, por el izquierdo: tras n visitas a cada uno, ambos están vacíos, y en la siguiente visita (al izquierdo) es cuando encontramos un bolsillo vacío por primera vez.
Supongamos que el bolsillo que descubrimos vacío por vez primera es el izquierdo y que en el otro, el derecho, quedan k chucherías. Alba ha metido la mano $n+1$ veces en el izquierdo, y $n-k$ en el derecho. La sucesión de visitas puede ser codificada con una lista de longitud $2n-k+1$, con $n+1$ símbolos I y $n-k$ símbolos D, con el significado obvio, donde en la última posición hay una I. Cada lista de éstas tiene probabilidad $2^{-(2n-k+1)}$. Y hay $\binom{2n-k}{n}$ de ellas, porque basta con escoger, por ejemplo, n posiciones de la lista (de entre las $2n-k$ primeras) para los símbolos I.
El mismo resultado se obtiene suponiendo que es el derecho el que por primera vez encontramos vacío, así que la respuesta es

$$\mathbf{P}(X = k) = 2 \times \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k+1}} = \binom{2n-k}{n} \frac{1}{2^{2n-k}}\,.$$

En términos de variables aleatorias, si es el izquierdo el bolsillo que encontramos vacío, entonces medir la probabilidad de que $X = k$ es lo mismo que medir la probabilidad de que una variable binomial negativa de parámetros $(n+1, 1/2)$ tome el valor $2n-k+1$: cada "éxito" es una visita al bolsillo izquierdo, y el suceso de interés es que tengamos el éxito $n+1$ en el tiempo $2n-k+1$. Recordando la fórmula de la función de masa de la binomial negativa, obtenemos el resultado deseado.