

**Cálculo I**  
**Segundo curso del Grado en Informática, UAM**  
**Curso 2011-2012**

**Solucionario del examen de enero, 18 de enero de 2012**

1. Decide, razonando la respuesta, si las siguientes series son convergentes:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(1))^n, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n)}, \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n} n!$$

SOLUCIÓN. La serie (a) es convergente; para ello se puede decir que es una serie geométrica de razón  $\cos 1$  (que es un número positivo y menor que 1); o usar el criterio del cociente para obtener el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\cos 1)^{n+1}}{(\cos 1)^n} = \cos 1 < 1$ , o incluso si se quiere el de la raíz.

La serie (b) es una serie alternada; si miramos la formada por sus valores absolutos se tiene  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ , que es divergente por comparación con la serie  $\sum \frac{1}{n}$ , ya que ésta es divergente y  $\frac{1}{n} < \frac{1}{\log n}$ ; por lo tanto la serie no converge absolutamente, pero aún podría converger condicionalmente (y por ello converger). Como la sucesión  $a_n = \frac{1}{\log n}$  es decreciente, ya que  $\frac{1}{\log n+1} < \frac{1}{\log n}$  para todo  $n$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n} = 0$ , el criterio de Leibniz nos dice que la serie es convergente (y de hecho condicionalmente convergente).

Finalmente la serie (c) se puede estudiar con el criterio del cociente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-(n+1)}(n+1)!}{e^{-n}n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{e} = \infty$$

y por ello la serie es divergente. (También se podría usar la fórmula de Stirling).

2. Calcula el polinomio de Taylor de grado 3 alrededor del punto  $x_0 = \pi$  de la función

$$F(x) = \int_{\pi}^x \frac{1}{1 + \sin(y)} dy.$$

SOLUCIÓN. Para empezar, obsérvese que  $F(\pi) = 0$  (se trata de una integral con el mismo límite inferior que superior). Luego hallamos las sucesivas derivadas de  $F(x)$ :

■  $F'(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$ , por el teorema fundamental del cálculo.

■  $F''(x) = \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^2}$ ,

■  $F'''(x) = \frac{\sin x (1 + \sin x)^2 + \cos x \cdot 2 \cdot (1 + \sin x) \cdot \cos x}{(1 + \sin x)^4}$

Evaluando estas derivadas en  $\pi$  obtenemos los valores  $F'(\pi) = 1$ ,  $F''(\pi) = 1$  y  $F'''(\pi) = 2$ . Finalmente, los llevamos a la fórmula para el polinomio de Taylor:

$$P(x) = (x - \pi) + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + \frac{2}{3!}(x - \pi)^3 = (x - \pi) + \frac{1}{2}(x - \pi)^2 + \frac{1}{3}(x - \pi)^3.$$

3. Halla el valor de los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que la siguiente función  $f(x)$  sea derivable en todo su dominio:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi x) + a & \text{si } x \leq 0, \\ a + b \cdot x & \text{si } 0 < x < 2, \\ c \cdot e^{x^2} & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

SOLUCIÓN. Las condiciones para que  $f$  sea continua se obtienen haciendo que los límites laterales coincidan en cada punto. En  $x = 0$ , la condición queda  $a = a$  (es decir, no hay condición alguna, vale cualquier  $a$ ); y en  $x = 2$  queda

$$a + 2b = c \cdot e^4.$$

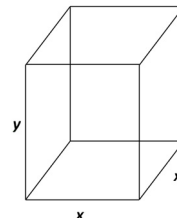
Las condiciones de diferenciabilidad resultan ser

$$\pi \cos 0 = b \quad (\text{en } x = 0),$$

$$b = c \cdot 4e^4 \quad (\text{en } x = 2).$$

De estas condiciones obtenemos primero  $b = \pi$ , luego que  $c = \frac{\pi}{4e^4}$  y, finalmente,  $a = c \cdot e^4 - 2b = \frac{\pi}{4} - 2\pi$ .

4. Una empresa recibe el encargo de construir cajas con forma de paralelepípedo de modo que la base sea un cuadrado. El material que se usa para la base y la tapa superior tiene un coste de 2 euros por  $m^2$ , mientras que el material utilizado para las paredes laterales tiene un coste de 8 euros por  $m^2$ . Además, el volumen de las cajas debe ser  $0.25 \text{ m}^3$ . ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de la caja para tener un coste mínimo?



SOLUCIÓN. Si, como en el dibujo, las dimensiones son  $x$  (lado de la base) e  $y$  (altura), el coste de fabricación de una caja de esas dimensiones es

$$\text{coste} = \underbrace{2}_{2 \text{ tapas}} \cdot \underbrace{x^2}_{\text{área base}} \cdot \underbrace{2}_{\text{euros/m}^2} + \underbrace{4}_{4 \text{ paredes}} \cdot \underbrace{y^2}_{\text{área pared}} \cdot \underbrace{8}_{\text{euros/m}^2} = 4x^2 + 32y^2.$$

Por otro lado, el volumen debe ser siempre

$$0.25 = x^2 \cdot y$$

de donde podemos despejar, por ejemplo,  $x^2 = 0.25/y$  y llevarlo a la función de coste (que ahora solo depende de  $y$ ):

$$\text{coste}(y) = 4 \frac{0.25}{y} + 32y^2 = \frac{1}{y} + 32y^2.$$

Para hallar los extremos, derivamos

$$\text{coste}'(y) = -\frac{1}{y^2} + 64y$$

e igualamos a 0:

$$0 = -\frac{1}{y^2} + 64y \implies \frac{1}{y^2} = 64y \implies 64y^3 = 1,$$

cuya única raíz real es  $y = 1/4$ . Llevándolo a la ecuación del volumen, nos da que  $x = 1$ . Se trata de un mínimo, pues la segunda derivada de la función de coste es  $1/y^3 + 64$  (que es positiva para  $y = 1/4$ ).

5. Dibuja la gráfica de la función  $f(x) = x \ln(x)$ .

SOLUCIÓN. Para empezar, la función solo está definida para  $x > 0$ , por la presencia del logaritmo. No tiene sentido analizar si es par o impar puesto que no está definida para  $x$  negativos. Pero sí es interesante calcular los dos siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0 \quad (\text{que sale, por ejemplo, aplicando la regla de L'Hôpital});$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln(x) = +\infty \quad (\text{inmediato})$$

(el primero nos dice que sería razonable definir  $f(0) = 0$ ). Los puntos de corte con los ejes se obtienen fácilmente. No podemos calcular  $f(0)$ , pero ya hemos visto su valor en el sentido del límite. Por otro lado,

$$0 = f(x) \implies 0 = x \ln(x)$$

tiene solución  $x = 1$ , que es donde se anula el logaritmo (la otra “solución” sería  $x = 0$ , que no está en el dominio, pero en el sentido del límite. . .). Buscamos ahora los extremos derivando:

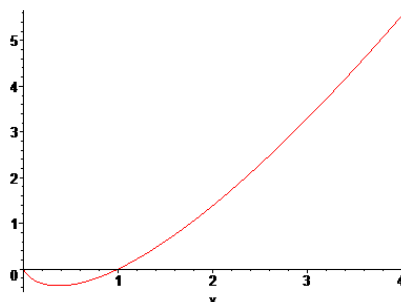
$$f'(x) = \ln(x) + x \frac{1}{x} = 1 + \ln(x)$$

e igualando a 0:

$$1 + \ln(x) = 0 \implies \ln(x) = -1 \implies x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Obsérvese que es un mínimo, pues  $f''(x) = \frac{1}{x}$ , que es positivo en  $x = 1/e$ . El número  $1/e$ , por cierto, es aproximadamente 0.37.

De hecho, el signo de la primera derivada es negativo entre 0 y  $1/e$ , y positivo luego. Lo que nos dice que la función decrece hasta  $x = 1/e$  y crece luego. La segunda derivada es siempre positiva. Con esto, y quizás el valor  $f(1) = 1 \ln(1) = 0$ , ya podemos dibujar la gráfica de la función.



6. Calcula el valor de la integral

$$\int_1^{\infty} x e^{-x} dx.$$

SOLUCIÓN. Es una simple aplicación de la regla de integración por partes, donde tomamos

$$u = x, \quad du = dx \quad \text{y} \quad dv = e^{-x} dx, \quad v = -e^{-x}$$

Calculamos la primitiva:

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^{-x} dx}_{dv} = -x e^{-x} - \int (-e^{-x}) dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(1 + x).$$

Aplicando la regla de Barrow, resulta que

$$\int_1^{\infty} x e^{-x} dx = -e^{-x}(1 + x) \Big|_1^{\infty} = \left( \lim_{x \rightarrow \infty} -e^{-x}(1 + x) \right) + 2e^{-1} = \frac{2}{e},$$

pues el primer límite es 0 ( $e^{-x}$  decae a 0 mucho más rápidamente de lo que  $(1 + x)$  crece a  $\infty$ ; o aplíquese L'Hôpital).

Obsérvese que el resultado es un número positivo, *como debe ser*, pues estamos integrando una función positiva ( $x e^{-x}$  en el intervalo  $(1, \infty)$ ).