Matemática Discreta (Matemáticas UAM, curso 2009-2010)
Examen de septiembre, 6-9-2010

---

1. (2 puntos) a) Halla la función generatriz de la sucesión $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$a_0 = 1\,, \qquad a_n = a_{n-1} + \cdots + a_0 \quad \text{para } n \geq 1.$$

Solución. Llamemos $f(x)$ a esa función generatriz:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\Big)\, x^n = 1 + x \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} a_k\Big)\, x^{n-1} \overset{m=n-1}{=} 1 + x \sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{m} a_k\Big)\, x^m.$$

Ahora, recordando el efecto de multiplicar una función generatriz por $1/(1-x)$, escribimos que

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1-x}\, f(x)\,, \quad \text{de donde} \quad f(x)\Big(1 - \frac{x}{1-x}\Big) = 1 \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \frac{1-x}{1-2x}\,.$$

b) Sean $f(x)$ y $g(x)$ las funciones generatrices de las sucesiones $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ y $(b_n)_{n=0}^{\infty}$, respectivamente. ¿Cuáles son los coeficientes de la función

$$h(x) = \frac{x}{1-x}\, f(x)\, g'(x) \quad ?$$

Solución. Obsérvese que

$$x g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n x^n\,.$$

Así que

$$f(x) \cdot x g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k b_k\, a_{n-k}}_{\equiv c_n}\Big) x^n\,.$$

Finalmente,

$$\frac{1}{1-x} f(x) \cdot x g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{j=0}^{n} c_j\Big) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\underbrace{\sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} k b_k a_{j-k}}_{\text{respuesta}}\Big) x^n$$

2. (2 puntos) a) ¿Qué condiciones debe cumplir n para que el grafo completo K_n tenga un número par de aristas? Justifica tu respuesta.

Solución. El grafo K_n tiene todas las posibles aristas, es decir, $\binom{n}{2}$. Queremos que este número sea par, es decir,

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{debe ser par.}$$

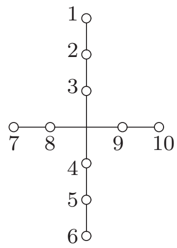
O, lo que es lo mismo, $n(n-1)$ ha de ser múltiplo de 4. Para que eso ocurra, n debe ser múltiplo de 4 (es decir, $n \equiv 0$ módulo 4), o bien $n \equiv 1$ módulo 4 (y así $n-1$ es múltiplo de 4). Los otros dos casos, $n \equiv 2$ y $n \equiv 3$ no dan resultados pares.

b) Supongamos que K_n tiene un número par de aristas. Queremos colorear la mitad de sus aristas de rojo y la otra mitad de azul. ¿De cuántas maneras distintas se podrá hacer?

Solución. Si hay $\binom{n}{2}$ aristas y hemos de pintar la mitad de rojo (y la otra mitad de azul), bastará con escoger qué mitad se pinta de rojo (por ejemplo). Lo que se puede hacer de

$$\binom{\binom{n}{2}}{\binom{n}{2}/2} \quad \text{maneras distintas.}$$

3. (2 puntos) a) El rey visogodo Leovigildo quiso adornar la cruz heráldica de su linaje, cuyo diseño se muestra a la derecha, con incrustaciones de rubíes, diamantes y esmeraldas. El orfebre de palacio, que sabía su buena Combinatoria, calculó cuidadosamente el número de cruces distintas que había. Calcúlalas tú también.



b) Leovigildo, alarmado por el enorme número de posibilidades, le pidió que calculara cuántas habría si se usaran únicamente 7 diamantes y 3 rubíes. Ayuda a nuestro orfebre en el cálculo.

Solución. El grupo G de simetrías de la figura está formado por las siguientes (descritas geométricamente): la identidad, la reflexión en el eje vertical, la reflexión en el horizontal, y el giro de 180 grados (que es la composición de las dos anteriores). En realidad es el 4-grupo de Klein, actuando sobre los vértices de la figura. Las permutaciones en sí, si numeramos los vértices como en la figura, son las siguientes:

$$\text{reflexión vertical} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7,10)(8,9);$$
$$\text{reflexión horizontal} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix} = (1,6)(2,5)(3,4)(7)(8)(9)(10);$$
$$\text{reflexión } 180 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1,6)(2,5)(3,4)(7,10)(8,9).$$

Lo que nos dice que la indicatriz de ciclos es

$$J_G(y_1,\dots,y_{10}) = \frac{1}{4}\big(y_1^{10} + y_1^6 y_2^2 + y_1^4\, y_2^3 + y_2^5\big).$$

Así que si queremos calcular el número de coloraciones con 3 colores, basta sustituir las y_j por 3 para obtener

$$\frac{1}{4}(3^{10} + 3^8 + 3^7 + 3^5) = 17010\,.$$

Si solo usamos dos colores, el teorema de Pólya nos dice que el inventario de coloraciones es

$$I(x,y) = \frac{1}{4}\Big((x+y)^{10} + (x+y)^6\ (x^2+y^2)^2 + (x+y)^4\ (x^2+y^2)^3 + (x^2+y^2)^5\Big).$$

Nos piden calcular el coeficiente de x^7y^3. Del último factor no puede salir ninguna contribución (son todos términos en x^2). Del primero sale

$$(x+y)^{10} = \sum_{k=0}^{10}\binom{10}{k} x^k\ y^{10-k} \quad\longrightarrow\quad \binom{10}{3}.$$

Del segundo,

$$(x+y)^6(x^2+y^2)^2 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k} x^k\ y^{6-k}\sum_{n=0}^{2}\binom{2}{n} x^{2n}\ y^{4-2n} = \sum_{k=0}^{6}\sum_{n=0}^{2}\binom{6}{k}\binom{2}{n} x^{k+2n}\, y^{10-(k+2n)}.$$

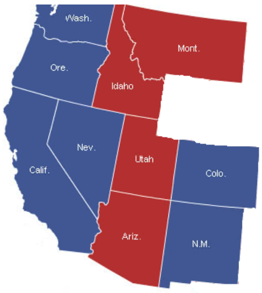
Para que $k+2n=7$ (donde k y n están en los rangos descritos en las sumas), debe ser que $k=3$ y $n=2$ (que nos da un $\binom{6}{3}\binom{2}{2}$), o bien $k=5$ y $n=1$, que produce un $\binom{6}{5}\binom{2}{1}$. Finalmente, la tercera es

$$(x+y)^4(x^2+y^2)^3 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k} x^k\ y^{4-k}\sum_{n=0}^{3}\binom{3}{n} x^{2n}\ y^{6-2n} = \sum_{k=0}^{4}\sum_{n=0}^{3}\binom{4}{k}\binom{3}{n} x^{k+2n}\, y^{10-(k+2n)}.$$

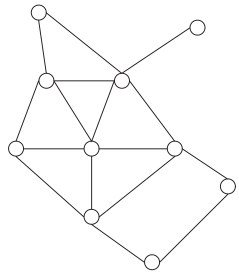
Ahora $k+2n=7$ tiene dos soluciones: o bien $k=1$ y $n=3$, o bien $k=3$ y $n=2$. En total,

$$\frac{1}{4}\Big(\binom{10}{3} + \binom{6}{3}\binom{2}{2} + \binom{6}{5}\binom{2}{1} + \binom{4}{1}\binom{3}{3} + \binom{4}{3}\binom{3}{2}\Big) = 42.$$

4. (2 puntos) A la derecha aparece el mapa de algunos estados del Oeste de EEUU, coloreados según los resultados de las últimas elecciones. Querríamos colorear el mapa de la manera usual, es decir, de forma que estados vecinos no lleven el mismo color. Disponemos de una paleta de k colores. ¿De cuántas maneras distintas lo podremos hacer? (Nota: si la frontera entre dos estados tiene únicamente un punto en común, no consideraremos como vecinos a esos dos estados. La región "exterior" no hace falta colorearla).



Solución.
El grafo asociado al mapa tiene el aspecto que se muestra a la derecha. La mejor manera de calcular su polinomio cromático consiste en aplicar el truco de dos grafos que comparten un vértice o una arista. Obsérvese que podemos "despegar" un triángulo arriba (pagando con un factor $k(k-1)$ en el denominador), un cuadrado abajo (con otro factor análogo) y un L_2 arriba a la derecha (con un factor k). Lo que queda es un grafo con forma de rueda (5 vértices en un pentágono, todos unidos a un vértice central) que llamaremos R_5:



$$P_G(k) = \frac{P_{K_3}(k)}{k(k-1)} \, \frac{P_{C_4}(k)}{k(k-1)} \, \frac{P_{L_2}(k)}{k} \, P_{R_5}(k).$$

Todos los polinomios involucrados son conocidos. Nos falta $P_{R_5}(k)$. Se puede calcular con el algoritmo de quitar aristas (por cierto, mejor quitar una de dentro que una del borde), o también argumentar como sigue: si tenemos k colores, habrá que emplear uno en el vértice central, que automáticamente queda prohibido para los restantes. Pero si no usamos ese color, lo que hay que hacer es colorear un C_5. Así que el polinomio cromático de la rueda R_5 es $P_{R_5}(k) = k\, P_{C_5}(k-1)$.

5. (1 punto) El temario de las últimas oposiciones a Secundaria de Lengua Española constaba de 72 temas. En el examen, el procedimiento era el siguiente: se sorteaban 5 temas y el opositor podía elegir el que más le gustara.

Mi señora me pidió que le calculara la probabilidad de que, estudiando solo una fracción del temario, le saliera (al menos) un tema de los que se había preparado. En concreto, decidió estudiarse 40. ¿Qué probabilidad tenía de que así ocurriera?

Solución. Como suponemos que los temas se sacan con probabilidad uniforme (!), aplicamos la noción de casos favorables divididos por los posibles. Casos posibles hay $\binom{72}{5}$, pues se eligen 5 temas de entre los 72. Los casos "favorables" son difíciles de calcular, pero los desfavorables no. Porque estos casos desfavorables son aquellas extracciones en las que los 5 temas se sacan de los $72 - 40 = 32$ que no hemos estudiado. Así que la probabilidad pedida es

$$1 - \frac{\binom{32}{5}}{\binom{72}{5}}.$$

Por cierto, esta probabilidad es del 98.56 %. Estudiar los 32 restantes sólo nos haría ganar ese escaso 1.5 % de probabilidad que resta. Saquen sus propias conclusiones.

6. (1 punto) Los números de Stirling $S(n,k)$ cuentan el número de formas de partir un conjunto de n elementos (distintos) en k bloques no vacíos. Los bloques, además, son indistinguibles. Prueba, con un argumento combinatorio, la recurrencia:

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + k \cdot S(n-1,k).$$

Solución. El argumento se vio en clase. Se pueden consultar las notas del curso para el detalle.