**Matemática Discreta**
**Segundo curso del grado en Matemáticas UAM, curso 2010-2011**
**Examen de enero, 20-1-2011**

---

**1.** (1 punto) Tenemos $k$ símbolos. Vamos a formar listas de longitud $n$ en las que aparezcan todos los símbolos excepto, a lo sumo, dos de ellos. ¿Cuántas distintas habrá?

SOLUCIÓN. Recuérdese que una lista de longitud $n$ formada con los símbolos $\{1,\dots,k\}$ es lo mismo que una aplicación del conjunto $\{1,\dots,n\}$ en el conjunto $\{1,\dots,k\}$. El lenguaje de las aplicaciones será el conveniente en lo que sigue.

Clasificamos las listas del enunciado en función de que aparezcan (exactamente) los $k$ símbolos, exactamente $k-1$ o exactamente $k-2$ (que son todos los casos posibles). Ahora,

- si aparecen todos los símbolos, una de estas listas es lo mismo que una aplicación sobreyectiva de $\{1,\dots,n\}$ en $\{1,\dots,k\}$. De éstas hay $k!S(n,k)$.
- si aparecen todos los símbolos menos uno, elegimos primero qué símbolo no aparece ($k$ posibilidades) y luego hacemos una aplicación sobreyectiva de $\{1,\dots,n\}$ en el conjunto de los $k-1$ símbolos restantes. En total, $k\cdot(k-1)!S(n,k-1)$.
- En el tercer caso, elegimos qué dos no aparecen ($\binom{k}{2}$ posibilidades) y luego una sobreyectiva con el resto: en total, $\binom{k}{2}\cdot(k-2)!S(n,k-2)$.

Terminamos aplicando la regla de la suma para obtener el resultado final. Nótese que la respuesta da cuenta de todos los posibles casos de relación entre $n$ y $k$. Por ejemplo, si $n<k-2$, la respuesta es 0.

**2.** (2 puntos) a) Disponemos de 10 bolas blancas idénticas y de otras 10 bolas numeradas del 1 al 10. Queremos distribuirlas en dos cajas, la caja 1 y la caja 2 (pueden quedar, en principio, cajas vacías). ¿De cuántas formas distintas lo podremos hacer?

SOLUCIÓN. Observemos primero que la respuesta será el producto del número de distribuciones de las bolas idénticas por el número de distribuciones de las bolas numeradas.

- El número de maneras de distribuir las bolas blancas coincide con el número de soluciones de

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2=10 \\ x_1,x_2\geq 0\end{array}\right\} \quad\longrightarrow\quad \binom{10+2-1}{2-1}=\binom{11}{1}=11.$$

  Lo que, por otro lado, podríamos haber contado a mano (en la caja 1 pueden ir $0,1,\dots,10$ bolas).
- Colocar las numeradas es lo mismo que formar una lista de 10 posiciones, en cada una de las cuales se registra a qué caja va cada bola. En total, $2^{10}$ posibilidades.

La respuesta es el producto de esas dos cantidades.

b) ¿Y si fueran tres cajas numeradas? ¿Y si fueran $k$?

SOLUCIÓN. Hacemos directamente el caso general $k$.

- El número de maneras de distribuir las bolas blancas coincide con el número de soluciones de

$$\left\{\begin{array}{c} x_1+x_2+\cdots+x_k=10 \\ x_1,\dots,x_k\geq 0\end{array}\right\} \quad\longrightarrow\quad \binom{10+k-1}{k-1}=\binom{9+k}{k-1}.$$

- Colocar las numeradas es lo mismo que formar una lista de 10 posiciones, en cada una de las cuales se registra a qué caja va cada bola. En total, $k^{10}$ posibilidades.

La respuesta es el producto de esas dos cantidades.

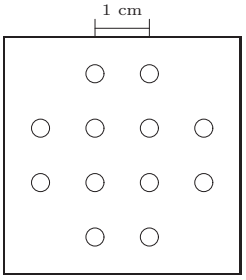
**3.** El grafo $G$ está formado por $K_n$, un grafo completo con $n$ vértices (etiquetados con los símbolos $a_1, \ldots, a_n$), y un $C_m$, un grafo circular con $m$ vértices (etiquetados con los símbolos $b_1, \ldots, b_m$), además de una arista uniendo los vértices $a_1$ y $b_1$. ¿Cuántos árboles abarcadores distintos tiene $G$?

SOLUCIÓN. La primera observación es que todo árbol abarcador deberá conservar la arista que une los dos "bloques" del grafo. Además, por cada árbol abarcador del $K_n$ tendremos todos los posibles del $C_m$. Aplicando la regla del producto, la respuesta final es

$$m \cdot n^{n-2},$$

porque un $C_m$ tiene $m$ posibles árboles abarcadores (quitar una cualquiera de sus aristas), mientras que un $K_n$ tiene $n^{n-2}$ (todos los posibles árboles con $n$ vértices, teorema de Cayley).

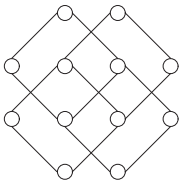
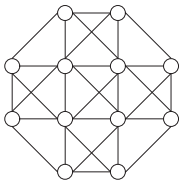
**4.** (2 puntos) Obsérvese el diseño de tarjeta sobre una cartulina cuadrada que se muestra en la figura de la derecha. En cada uno de los círculos podemos situar un símbolo del conjunto $\{1, \ldots, 10\}$.




a) ¿Cuántas tarjetas distintas se podrán diseñar si no queremos que haya símbolos iguales en círculos que disten entre sí exactamente $\sqrt{2}$ cm?

b) Ahora queremos diseñar tarjetas de manera que no haya símbolos iguales en círculos que disten entre sí una distancia $\leq \sqrt{2}$ cm. ¿Cuál será el número mínimo de símbolos requeridos?

SOLUCIÓN. Los grafos asociados a las dos cuestiones son, respectivamente,

$G_1$   $G_2$

En el primer apartado se pide calcular el polinomio cromático $p_{G_1}(k)$ y evaluarlo en $k = 10$. En el segundo, el número cromático $\chi(G_2)$. El grafo $G_1$ tiene dos componentes conexas, cada una de las cuales es un grafo formado por dos $C_4$ "pegados" por una arista. Con los argumentos habituales,

$$p_{G_1}(k) = \left[\frac{p_{C_4}(k)^2}{k(k-1)}\right]^2 = \left[\frac{\big((k-1)^4 + (k-1)\big)^2}{k(k-1)}\right]^2 = k^2(k-1)^2(k^2-3k+3)^4.$$

La respuesta se obtiene tomando $k = 10$.

El grafo $G_2$ contiene, como subgrafo, a un $K_4$, así que $\chi(G_2) \geq 4$. Pero por otro lado es fácil dar una coloración que usa exactamente 4 colores. Así que, en total, $\chi(G_2) = 4$.

**5.** (2 puntos) Contesta, argumentando brevemente las respuestas, a las siguientes cuestiones:

• Llamamos $S_n$ al número de $n$-listas son ceros y unos en las que no aparecen más de tres unos consecutivamente. Halla una relación de recurrencia para los numeros $S_n$.

SOLUCIÓN. Clasificamos las lista en función de cómo terminen:

- si acaban en 0, el resto de la lista tiene longitud $n-1$ y en ella no aparecen más de tres unos consecutivos. De éstas hay $S_{n-1}$.
- Si acaban en 1,
  - pueden acabar en 01 (de éstas, con el mismo argumento, hay $S_{n-2}$);
  - o bien acaban en 11. Para éstas,
    - si acaban en 011, tenemos $S_{n-3}$;
    - si acaban en 111, entonces necesariamente acaban en 0111, y de éstas hay $S_{n-4}$.

En total, $S_n = S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3} + S_{n-4}$.

• Llamábamos $p_k(n)$ al número de particiones del entero $n$ en $k$ partes. Estos números verifican la recurrencia $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$. Comprueba que $p_{n-3}(n) = 3$ para cada $n \geq 6$.

SOLUCIÓN. Se comprueba primero que $p_6(3) = 3$. La recurrencia nos dice que

$$p_{n-3}(n) = p_{n-4}(n-1) + p_{n-3}(3).$$

Si $n \geq 7$, el segundo sumando es siempre 0. Esto nos permite probar el resultado por inducción en $n$.
También se puede probar directamente, pues las únicas particiones de $n$ en $n-3$ partes son, si $n \geq 6$,

$$\underbrace{1+\cdots+1}_{n-4 \text{ unos}}+4\,, \quad \underbrace{1+\cdots+1}_{n-5 \text{ unos}}+2+3\,, \quad \underbrace{1+\cdots+1}_{n-6 \text{ unos}}+2+2+2.$$

**6.** (2 puntos) a) Prueba la identidad

$$n3^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k\, 2^{k-1} \qquad \text{para } n \geq 1$$

usando funciones generatrices.

SOLUCIÓN. El teorema del binomio nos dice que

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,, \qquad \text{y derivando con respecto a } x, \text{ que} \qquad n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k x^{k-1}\,.$$

Tómese $x = 2$ y ya está.
Alternativamente, podemos dividir toda la expresión por $n$ para obtener

$$3^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k}{n} 2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} 2^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 2^j\,,$$

que es un caso particular del teorema del binomio.

b) Pruébala con un argumento combinatorio.

SOLUCIÓN. Hay varios posibles argumentos. Uno de ellos va como sigue. Imaginemos que queremos formar listas de longitud $n$ formadas con cuatro símbolos, $A, B, C$ y $D$, con la única particularidad de que el símbolo $D$ aparece una única vez.

Para contar cuántas hay, elegimos primero en qué posición va el símbolo $D$ ($n$ posibilidades) y luego formamos el resto de la lista con los demás símbolos ($3^{n-1}$ posibilidades). Esto nos da el miembro de la izquierda.

En una manera alternativa de contar, vamos a llamar $k$ al número de posiciones ocupadas por los símbolos $B$, $C$ y $D$. Obsérvese que $k$ puede valer entre 1 y $n$.

- Elegimos primero qué posiciones son: $\binom{n}{k}$ posibilidades;
- decidimos luego en qué posición de éstas va el símbolo $D$ ($k$ posibilidades);
- para finalmente decidir qué símbolo ($B$ o $C$) va en las restantes $k-1$ ($2^{k-1}$ posibilidades). Nótese que el resto de las posiciones llevan $A$ (aquí no hay nada que contar).

La regla de la suma nos permite obtener el miembro de la derecha.

Una formulación alternativa del problema anterior (quizás más fácil de interpretar) es el siguiente: ¿de cuántas formas se pueden distribuir $n$ bolas numeradas en cuatro cajas numeradas si la primera debe llevar exactamente 1 bola?