

**Economía y finanzas matemáticas**  
**Optativa del grado en Matemáticas, UAM, 2012-2013**

**Breve solucionario del examen final, 14-5-2013**

**1.** (2 puntos) Nos ofrecen un bono de nominal  $M = 1000$  euros que tiene la siguiente estructura de pagos:

- dentro de 1 año pagará un cupón de montante  $M \cdot R_s(0, 1)$ , donde  $R_s(0, 1)$  es el tipo simple (fijado hoy) para el periodo  $0 \rightarrow 1$ ;
- dentro de 2 años pagará un cupón de montante  $M \cdot R_s(1, 2)$ , donde  $R_s(1, 2)$  es el tipo simple (que se fijará dentro de 1 año) para el periodo  $1 \rightarrow 2$ ;
- dentro de 3 años pagará un cupón de montante  $M \cdot R_s(2, 3)$ , donde  $R_s(2, 3)$  es el tipo simple (que se fijará dentro de 2 años) para el periodo  $2 \rightarrow 3$ ;
- a vencimiento (3 años) se devuelve, además, el nominal.

Valóralo teniendo en cuenta que los descuentos a 1, 2 y 3 años son del 97%, 92% y 86%, respectivamente. Explica los detalles de tu procedimiento de valoración (¡y usa fracciones!).

**SOLUCIÓN.** El primer cupón y la devolución de nominal se valoran simplemente por descuento de flujos (puesto que  $R_s(0, 1)$  es conocido). El montante de los cupones de tiempo 2 y 3, sin embargo, no es conocido a priori. Sin embargo, contratando los FRAs oportunos, podemos cambiar esos flujos  $R_s(1, 2)$  y  $R_s(2, 3)$  desconocidos por los correspondientes tipos implícitos  $F_s(0, 1, 2)$  y  $F_s(0, 2, 3)$ , que se pueden calcular en términos de los factores de descuento.

El cálculo final nos da que el bono tiene coste 1000, con su nominal (es decir, el bono está “a la par”).

**2.** (1.5 puntos) La onza de oro se cotiza hoy a 1800 euros. El descuento a 1 año es del 90%. Por almacenar una onza de oro durante un año cobran (al final del periodo) 13 euros. Calcula el precio que se fija hoy para la compraventa de una onza de oro dentro de 1 año. (El contrato forward del que estamos hablando tiene coste 0). Argumenta tu respuesta.

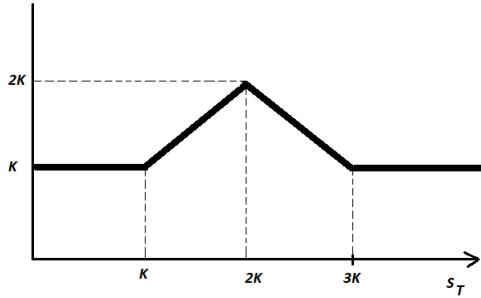
**SOLUCIÓN.** La respuesta es que el precio forward debe ser

$$F_0 = 1800/90\% + 13 = 2013.$$

Para comprobarlo,

- o bien se construye la cartera de réplica del forward (¡en la que no puede intervenir el forward!, solo oro comprado/vendido y bonos), se calcula su coste, y se exige que sea 0;
- o bien se argumenta por no arbitraje. Por ejemplo, si  $F_0 > 1800/90\% + 13$ , entonces pedimos prestados 1800, compramos una onza de oro y entramos en fwd como vendedor (coste hoy 0). A vencimiento, vendemos el oro a  $F_0$  (gracias al fwd), pagamos 13 de gastos de almacenamiento y devolvemos  $1800/90\%$  del préstamo. La diferencia es positiva. En el otro sentido, si  $F_0 < 1800/90\% + 13$ , entonces pedimos el oro prestado y... (completa el argumento y discute quién debe hacerse cargo de los gastos de almacenamiento).

**3.** (1.5 puntos) Fijamos un vencimiento  $T$ . En el mercado se pueden comprar y vender derivados (calls, puts, forwards, etc.) sobre un cierto subyacente  $S$  con diversos strikes. Además, hay un tipo de interés anual  $R$ . Queremos formar hoy una cartera que dé lugar, en tiempo  $T$ , a los flujos (dados en función de la cotización  $S_T$  del subyacente a vencimiento) que se recogen en la figura:



Describe la composición de la cartera.

**SOLUCIÓN.** Por ejemplo: un bono de nominal  $K$  (o  $Kr^{-RT}$  de dinero), una call comprada de strike  $K$ , dos calls vendidas de strike  $2K$  y una call comprada de strike  $3K$ . (Hay otras variaciones, usando acción y put de strike  $K$ ). La comprobación (gráfica o analítica) es casi directa.

4. (1 punto) La cotización de un cierto subyacente es  $S$ , su volatilidad es  $\sigma$ , y el tipo de interés (continuo) es  $r$ . Llamemos  $c$  y  $p$  a los precios Black-Scholes de la call y la put (europeas) de vencimiento  $T$  y strike  $K$ . ¿Cuál es la relación entre

$$\frac{\partial^2 c}{\partial S^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 p}{\partial S^2} ?$$

**SOLUCIÓN.** Ambas derivadas coinciden. Deriva dos veces en la fórmula de paridad call-put.

5. (1 punto) El instrumento financiero  $I_1$  cuesta hoy 100 euros y pagará 12 euros durante los próximos 10 años (empezando en el año 1). El instrumento  $I_2$ , que cuesta hoy 250 euros, pagará  $a$  euros los próximos 10 años. Calcula cuánto debe valer  $a$  para que ambos instrumentos tengan la misma TIR.

**SOLUCIÓN.**  $a = 30$ .

6. (1 punto) ¿Por qué, en ausencia de dividendos, los precios de la call americana y la call europea (con mismo strike, subyacente y vencimiento) deben coincidir?

7. (2 puntos) Fijamos un vencimiento  $T$ . En el mercado se cotizan

- el bono de nominal 1 (precio hoy, 9/10);
- un subyacente que puede tomar los valores 1, 2, 3 y 4 (precio hoy, 21/10);
- una call (sobre el subyacente) con strike 3 (precio hoy, 2/10);
- y una put con strike  $K$ .

Consideramos 4 estados posibles, definidos por los posibles valores del subyacente.

- a) Comprueba si el mercado es completo si tomamos  $K = 3$ .
- b) Supongamos ahora que  $K = 2$ . El precio de esta put es 2/10. Comprueba que no hay oportunidades de arbitraje y valora la call con strike 2.

SOLUCIÓN. En el apartado a), la matriz de flujos es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede comprobar que no tiene rango máximo (bien argumentando a la Gauss, comprobando que alguna fila es combinación lineal de otras, o bien con determinantes).

Para el apartado b), tenemos matriz de flujos y precios hoy dados por

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 9/10 \\ 21/10 \\ 2/10 \\ 2/10 \end{pmatrix}$$

Tomando, por ejemplo, el bono como numerario, deducimos que existe una probabilidad de valoración (concretamente,  $(2/9, 4/9, 1/9, 2/9)$ ). Así que no hay oportunidades de arbitraje. La valoración de la call de strike  $K = 2$ , cuyos pagos son  $(0, 0, 1, 2)$ , es directa:  $1/2$ . (Este precio también se podría haber obtenido por paridad call-put, o calculando una cartera de réplica).

*Nota:* La fórmula de paridad call-put (strike  $K$ , vencimiento  $T$ ) es

$$p(t) - c(t) = K \cdot P(t, T) - S(t) \quad \text{para cualquier } 0 \leq t < T,$$

donde  $P(t, T)$  es el factor de descuento de la fecha  $T$  a la fecha  $t$ .