Matemática Discreta | **2º de Ingeniería Informática**
Curso 2009-2010 | 5 de febrero de 2010

Examen Final

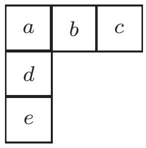
Apellidos y Nombre ______________________________

D.N.I. ______________________ Grupo ______________________

El examen dura tres horas. No se pueden usar calculadoras, apuntes, libros u otros materiales (salvo la hoja de fórmulas entregada junto con la hoja de examen). Todas las soluciones tienen que estar justificadas (no vale dar sólo las respuestas finales).

---

1. (2 puntos) En las cinco casillas de la pieza que se exhibe a la derecha podemos situar números naturales, con las siguientes restricciones: la suma de las tres casillas horizontales debe valer 21, y la suma de las tres verticales también. Necesitaríamos 2500 piezas distintas. ¿Las hay?



Solución. Obsérvese que el número que situemos en la primera casilla influye tanto en la suma en horizontal como en la vertical. Este valor, llamémosle a, puede ser cualquiera entre 1 y 19. Pero una vez que fijemos el valor de a, las casillas horizontales y las verticales son "independientes" (entre sí). Vamos entonces a clasificar las piezas en función, justamente, del valor a.

Fijemos un valor de a. Para las horizontales, tenemos que contar

$$\#\,\text{soluciones de } \begin{cases} b+c = 21-a \\ b \geq 1, c \geq 1 \end{cases} = \binom{21-a+2-1-2}{2-1} = \binom{20-a}{1} = 20-a\,.$$

Para las dos casillas verticales, el cálculo es exactamente el mismo. Aplicando la regla del producto, tenemos $(20-a)^2$ posibles piezas (para cada a). Finalmente, aplicamos la regla de la suma para concluir que

$$\#\,\text{piezas} = \sum_{a=1}^{19} (20-a)^2 \overset{20-a=j}{=} \sum_{j=1}^{19} j^2 = \frac{19\cdot 20\cdot 39}{6} = 2470.$$

(en el último paso utilizamos que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)/6$).

2. (1 punto) Durante los próximos $2n$ días, una persona va a ir visitando ciudades (una por día). Hay n ciudades. ¿Cuántos itinerarios distintos podrá diseñar si quiere visitarlas todas?

Solución. Un itinerario se puede codificar con una lista de $2n$ posiciones (los días sucesivos), en la que aparecen *todos* los símbolos posibles (las n ciudades).

En otros términos, se trata de una aplicación entre el conjunto de los $2n$ días y el conjunto de las n ciudades (a cada día le asignamos la ciudad en la que estemos). La condición de que se visiten todas las ciudades se traduce en que la aplicación sea *sobreyectiva*. Y el número de éstas es

$$n!\,S(2n,n).$$

3. (1 punto) Demuestra que si un árbol tiene un vértice de grado k, entonces tiene al menos k hojas.

Solución. Digamos que el árbol tiene n vértices (el número concreto no es relevante). Aplicamos la habitual fórmula de los grados:

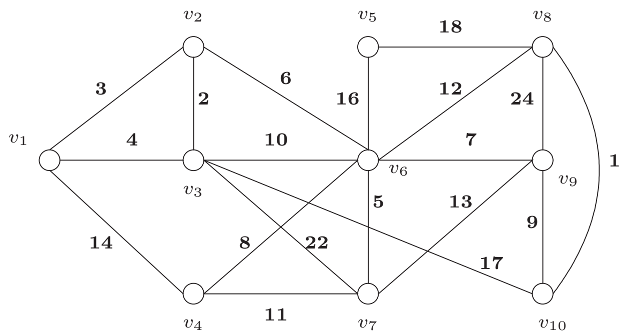
$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{gr}(v_j) \overset{\text{todo grafo}}{=} 2|A| \overset{\text{árbol}}{=} 2n-2 \quad \xrightarrow{\text{en nuestro caso}} \quad k + \underbrace{\mathrm{gr}(v_2) + \cdots + \mathrm{gr}(v_n)}_{n-1 \text{ sumandos}} = 2n-2.$$

Supongamos que el árbol tiene $t < k$ hojas. Es decir, hay $n-1-t$ vértices con grado ≥ 2. La suma de los grados sería

$$\geq k + t + 2(n-1-t) = 2n + k - t - 2\,,$$

que es una cantidad mayor que $2n-2$.

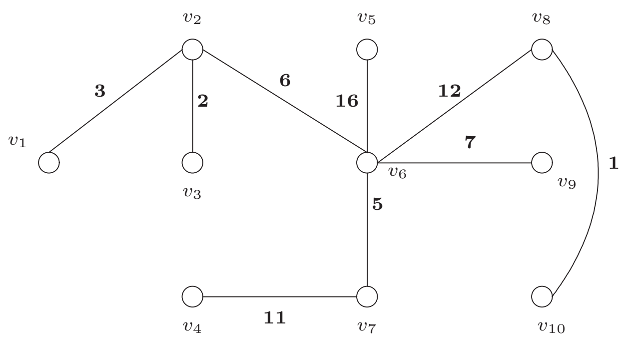
4. (1 punto) Construye, usando el algoritmo de Dijkstra, un árbol abarcador que calcule la ruta más corta a todos los demás vértices desde el vértice v_7 en el siguiente grafo con pesos:



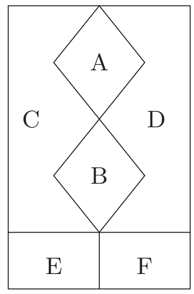
Solución. La tabla de algoritmo es como sigue:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	arista
v_7	∞	∞	22	11	∞	**5**	–	∞	13	∞	$\{v_7, v_6\}$
v_6	∞	**11**	15	11	21	–	–	17	12	∞	$\{v_6, v_2\}$
v_2	14	–	13	**11**	21	–	–	17	12	∞	$\{v_7, v_4\}$
v_4	14	–	13	–	21	–	–	17	**12**	∞	$\{v_6, v_9\}$
v_9	14	–	**13**	–	21	–	–	17	–	21	$\{v_2, v_3\}$
v_3	**14**	–	–	–	21	–	–	17	–	21	$\{v_1, v_2\}$
v_1	–	–	–	–	21	–	–	**17**	–	21	$\{v_6, v_8\}$
v_8	–	–	–	–	21	–	–	–	–	**18**	$\{v_8, v_{10}\}$
v_{10}	–	–	–	–	**21**	–	–	–	–	–	$\{v_5, v_6\}$

El árbol de caminos más cortos desde v_7 será:



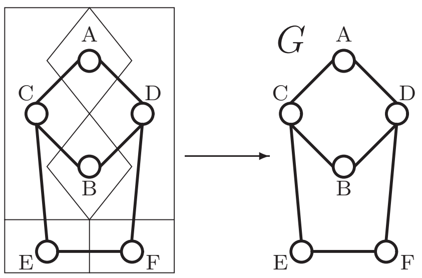
5. (2 puntos) Queremos colorear con k colores las seis regiones del mapa que aparece en la figura, de manera que regiones limítrofes (es decir, con toda una frontera en común) deben llevar distinto color. Por ejemplo, las regiones A y D son fronterizas, pero A y B no lo son. ¿de cuántas maneras distintas se podrá hacer?



¿Cuál es el número mínimo de colores necesario para colorear el mapa? Justifica la respuesta.

¿De cuántas maneras se puede colorear el mapa usando exactamente 4 colores?

Solución. Representamos las relaciones de vecindad con un grafo G:

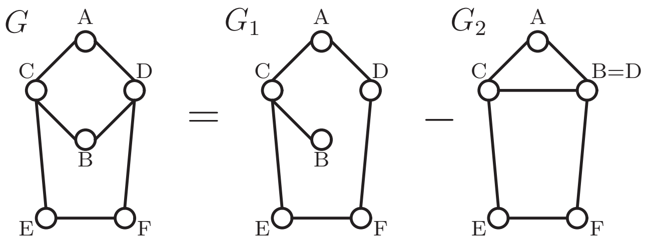


Todas las preguntas sobre el mapa se pueden ahora traducir a cuestiones sobre coloreados del grafo G. Por ejemplo, el apartado b) se responde calculando el número cromático del grafo, que resulta valer 3. Argumentamos: como contiene un ciclo de longitud 5, al menos se requerirán tres colores. Y es fácil dar una coloración explícita que use únicamente tres colores.

El apartado a) pide calcular el polinomio cromático del grafo G y evaluarlo en el valor k. El resultado es

$$P_G(k) = (k-1)\big[(k-1)^5-(k-1)\big]-(k-2)\big[(k-1)^4+(k-1)\big]\,.$$

Para verlo, aplicamos primero el algoritmo habitual (que representamos simbólicamente debajo de estas líneas):



Así que

$$P_G(k) = P_{G_1}(k) - P_{G_2}(k) = \frac{P_{C_5}(k)\cdot P_{L_2}(k)}{k} - \frac{P_{C_3}(k)\cdot P_{C_4}(k)}{k(k-1)}\,,$$

donde hemos aplicado el argumento habitual de grafos que comparten un vértice (para G_1) o una arista (para G_2). Simplificando, obtenemos la expresión para $P_G(k)$ escrita arriba.

Finalmente, el número de maneras de coloreas con 4 colores resulta ser

$$P_G(4)-4P_G(3) = \big[3\cdot(3^5-3)-2\cdot(3^4+3)\big]-4\cdot\big[2\cdot(2^5-2)-1\cdot(2^4+2)\big] = 552-4\cdot 42 = 384.$$

Para obtener la fórmula $P_G(4)-4P_G(3)$ argumentamos por inclusión/exclusión: $P_G(4)$ cuenta el número de coloraciones con 4 colores (aunque no es necesario usarlos todos). Habrá que restar las que usan tres colores: elegimos primero qué tres colores (4 posibilidades) y luego contamos cuántas coloraciones se pueden hacer con esos tres colores ($P_G(3)$ maneras). Y aquí nos paramos, porque con menos de 3 colores no se puede colorear.

6. a) (2 puntos) Resuelve la siguiente ecuación de recurrencia

$$a_{n+2} - a_{n+1} - 6a_n = 5 \cdot 3^{n+1}, \ n \geq 0, \quad a_0 = 0, a_1 = 8.$$

b) (1 punto) Calcula la función generatriz de la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$ que cumple

$$a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 3^{n+1}, \ n \geq 2, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

SOLUCIÓN. a) Se trata de una ecuación de recurrencia lineal, de segundo orden, no homogénea. Aplicamos el procedimiento habitual:

- Describimos la solución general de la ecuación no homogénea. La ecuación característica asociada es

$$r^2 - r - 6 = 0\,, \quad \text{cuyas dos raíces son} \quad r = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \quad \longrightarrow 3 \text{ y } -2.$$

  Así que la solución general de la homogénea se puede escribir como

$$\big(A\,3^n + B(-2)^n\big)_{n=0}^{\infty}\,, \qquad \text{donde } A \text{ y } B \text{ son dos parámetros.}$$

- Buscamos una solución particular de la ecuación completa. Podemos probar con una solución del tipo $a_n = C\,n\,3^n$ (¿por qué no intentamos con una del tipo $C\,3^n$?, porque la sucesión 3^n es solución de la homogénea, no puede serlo de la completa). Si fuera de la forma propuesta, tendría que cumplirse que

$$C(n+2)3^{n+2} - C(n+1)3^{n+1} - 6Cn3^n = 5 \cdot 3^{n+1}$$

$$\overset{\text{agrupando términos del mismo tipo}}{\Longrightarrow} \quad n3^n(9C - 3C - 6C) + 3^n(18C - 3C) = 15 \cdot 3^n$$

  Lo que nos dice que $C = 1$ y que, por tanto, $a_n = n\,3^n$ es una solución particular.

- La solución general de la ecuación completa se puede escribir, finalmente, como

$$a_n = A\,3^n + B\,(-2)^n + n\,3^n$$

  Ahora sólo queda determinar los valores de A y B que hacen que $a_0 = 0$ y $a_1 = 8$:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = A + B \\ 8 = 3A - 2B + 3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad A = 1, \ B = -1.$$

b) Llamemos $f(x)$ a la función generatriz de los (a_n). Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} \big(4a_{n-1} - 3a_{n-2} + 3^{n+1}\big)\,x^n \\ &= 1 + x + 4\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}\,x^n}_{=x(f(x)-a_0)} - 3\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2}\,x^n}_{=x^2\,f(x)} + 3\underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} 3^n x^n}_{=\frac{1}{1-3x}-1-3x} \\ &= 1 + x + 4x(f(x) - 1) - 3x^2\,f(x) + \frac{3}{1-3x} - 3 - 9x\,. \end{aligned}$$

Es decir,

$$f(x)(1 - 4x + 3x^2) = -2 - 12x + \frac{3}{1-3x}\,.$$

Despejando $f(x)$, se obtiene la expresión para la función generatriz.