1 a) $\boxed{\text{FALSO}}$. Por ejemplo, si $E=\mathbb{R}^2$, con el $\langle\,,\,\rangle$ estándar, la aplicación dada en la base canónica por $T=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ es autoadjunta porque es simétrica, y

$$\langle T\vec{u},\vec{v}\rangle = (u_1\ u_2)\,T^t\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = (u_1\ u_2)\,T\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix} = \langle \vec{u}, T v\rangle.$$

Si $\beta=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$,

$$[T]_\beta = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\0&-1\end{pmatrix},$$

que NO es simétrica.

Si T a.a. y β ORTONORMAL, entonces $[T]_\beta$ SÍ es siempre simétrica.

---

b) $\boxed{\text{VERDADERO}}$

Poner $L_1=P_1+U_1$, $L_2=P_2+U_2$. Como L_1 y L_2 no son paralelas, $U_2\not\subset U_1$, con lo cual $U_2\not\subset U_1\cap U_2$, y por tanto $\dim(U_1\cap U_2)=0$, lo que implica

$$\dim(U_1+U_2)=n-1+1-0=n,$$

y por tanto $U_1+U_2=V$, y $L_1+L_2=\mathbb{A}$, y $\dim(L_1+L_2)=n$

Si $L_1\cap L_2=\phi$, la fórmula de Grassmann dice

$$\begin{aligned} n=\dim(L_1+L_2) &= \dim(L_1)+\dim(L_2)-\dim(U_1\cap U_2)+1\\ &= n-1+1-0+1\\ &= n+1, \end{aligned}$$

lo cual es absurdo. Por tanto, $\boxed{L_1\cap L_2\neq\phi}$.

c) $\boxed{\text{FALSO}}$ Por ejemplo, $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ es ortogonal ya que $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Pero <u>no</u> tiene la forma indicada

d) $\boxed{\text{VERDADERO}}$

$$f\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \tilde{f}\begin{pmatrix}4-3\\3-2\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + \tilde{f}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \tilde{f}\begin{pmatrix}3-2\\2-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + f\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} - f\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\7\end{pmatrix}.$$

(2) El plano Π de ecuación $ax+by+cz+d=0$ contiene a la recta L si y sólo si contiene dos puntos de L (ya que dos puntos determinan una recta de manera única).
Los puntos $\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ están en L, así que a, b, c, d satisfacen

$$-c+d=0 \qquad 2a+b-c+d=0$$

$$\Rightarrow c=d, \quad b=-2a$$

$$\Rightarrow \Pi: \ ax-2ay+cz+c=0.$$

$$d(\Pi, P) = \frac{|a\cdot 1-2a\cdot 2+c\cdot 1+c|}{\sqrt{a^2+(-2a)^2+c^2}} = 2$$

$$\Rightarrow |-3a+2c| = 2\sqrt{5a^2+c^2} \Rightarrow (-3a+2c)^2 = 4(5a^2+c^2)$$

$$\Rightarrow 9a^2-12ac+\cancel{4c^2} = 20a^2+\cancel{4c^2}$$

$$\Rightarrow a(11a+12c)=0$$

Caso 1: $a=0$, $c\neq 0$

$$\Rightarrow \Pi: cz+c=0,$$

ó

$$\boxed{z+1=0}$$

Caso 2: $a\neq 0 \Rightarrow c=-\frac{11a}{12}$

$$\Rightarrow \Pi: ax-2ay-\frac{11a}{12}z-\frac{11a}{12}=0$$

ó

$$\boxed{x-2y-\frac{11z}{12}-\frac{11}{12}=0}$$

ó

$$\boxed{12x-24y-11z-11=0}$$

③ a) Sólo falta ver que es definida positiva ya que es bilineal por definición.

Usamos el criterio de Sylvester:

$$|1| = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 > 0.$$

Por tanto, $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es <u>definida positiva</u>.

(y define un producto escalar).

b) Sea $U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Pongamos

$$\text{proy}_U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{proy}_U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \perp U$, con lo cual,

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad y \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -a \\ -b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Rightarrow (1 \ -a \ -b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1 \ -a \ -b) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{1 - 2a - b = 0}$$

$$(1 \ -a \ -b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (1 \ -a \ -b) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{-a - 2b = 0}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2a + b - 1 = 0 \\ -2a - 4b = 0 \end{matrix} \Rightarrow -3b = 1 \Rightarrow \boxed{b = -\frac{1}{3}} \Rightarrow 2a = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{a = \frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\text{proy}_U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}}$$

4 a) La simetría alrededor de $x-z=0$ en la base $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, está dada por la matriz

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En la base standard,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la simetría buscada (ya que, antes del desplazamiento, el punto $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ queda fijo) es

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

b) En la base $\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, la matriz es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$.

En la base standard es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

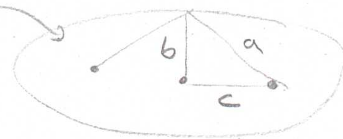
Por tanto, como antes del desplazamiento, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ queda fijo, la ecuación buscada es

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-2 \end{pmatrix}}$$

(5, cont)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Semieje principal: } a = 3 \\ \quad \text{"} \quad \text{secundario: } b = 2 \end{array}} \begin{array}{l} \text{ecuación } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \\ \text{ecuación } \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}. \end{array}$$

__Focos:__ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$



$$= \sqrt{9-4} = \underline{\underline{\sqrt{5}}}.$$

Por tanto, las coordenadas de los focos son:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Focos son: } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

Cambio de base:

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$