Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2004-2005

Sobre superficies

NOTA. Estas páginas no pretenden ser un resumen de lo estudiado en el curso sobre superficies. Son, simplemente, una exposición ordenada de los distintos conceptos y fórmulas que han ido apareciendo.

Decimos que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie** si, para cada punto $\mathbf{p} \in S$, existen entornos $V \subset \mathbb{R}^3$ y $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y una **carta** (o parametrización local) $\mathbb{X}$

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{X}: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longrightarrow & \mathbb{X}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \end{array} \qquad \text{con } \mathbb{X}(U) = S \cap V$$

de manera que

i) $\mathbb{X}$ es diferenciable;
ii) $\mathbb{X}$ es un homeomorfismo de U en $S \cap V$ (esto es, $\mathbb{X}$ es inyectiva y la inversa correspondiente $\mathbb{X}^{-1}$ es continua);
iii) Para todo $\mathbf{q} \in U$, la diferencial $d\mathbb{X}_{\mathbf{q}}$ es inyectiva (esto es, $\mathbb{X}_u(\mathbf{q})$ y $\mathbb{X}_v(\mathbf{q})$ son linealmente independientes).

Dado un punto $\mathbf{p} \in S$, el **plano tangente** $T_{\mathbf{p}}S$ (a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$) es el conjunto de los vectores tangentes en $\mathbf{p}$ a las curvas $\boldsymbol{\alpha} \subset S$ que pasan por $\mathbf{p}$.

El **vector normal** $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ a la superficie en el punto $\mathbf{p}$ es el único vector (salvo signo) unitario y perpendicular a los vectores del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$.

Al poner coordenadas: si $\mathbb{X}(u,v)$ es una carta que parametriza un entorno de $\mathbf{p}$, con $\mathbb{X}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, entonces los vectores $\{\mathbb{X}_u(\mathbf{q}), \mathbb{X}_v(\mathbf{q})\}$ forman una base de $T_{\mathbf{p}}S$. Y el vector vector normal viene dado por

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = (\mathbf{N} \circ \mathbb{X})(\mathbf{q}) = \frac{\mathbb{X}_u(\mathbf{q}) \times \mathbb{X}_v(\mathbf{q})}{\|\mathbb{X}_u(\mathbf{q}) \times \mathbb{X}_v(\mathbf{q})\|} .$$

A. La primera forma fundamental

Sea $\mathbf{p} \in S$ y consideremos su plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$. La primera forma fundamental (de S en $\mathbf{p}$) es la aplicación

$$\begin{array}{rccl} I_{\mathbf{p}}: & T_{\mathbf{p}}S & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \mathbf{w} & \longrightarrow & I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = <\mathbf{w}, \mathbf{w}> , \end{array}$$

donde $<\mathbf{v}, \mathbf{w}>$ significa, simplemente, el producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Si $\mathbb{X}$ es una carta en $\mathbf{p}$, con $\mathbb{X}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, entonces $\{\mathbb{X}_u(\mathbf{q}), \mathbb{X}_v(\mathbf{q})\}$ es una base de $T_{\mathbf{p}}S$. En términos de esa base, si escribimos un vector $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$ como $\mathbf{w} = a\mathbb{X}_u(\mathbf{q}) + b\mathbb{X}_v(\mathbf{q})$, entonces

$$\boxed{I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = a^2\, E(\mathbf{q}) + 2ab\, F(\mathbf{q}) + b^2\, G(\mathbf{q})},$$

donde, siguiendo la notación de Gauss,

$$\boxed{E(\mathbf{q}) = <\mathbb{X}_u(\mathbf{q}), \mathbb{X}_u(\mathbf{q})>}, \qquad \boxed{F(\mathbf{q}) = <\mathbb{X}_u(\mathbf{q}), \mathbb{X}_v(\mathbf{q})>}, \qquad \boxed{G(\mathbf{q}) = <\mathbb{X}_v(\mathbf{q}), \mathbb{X}_v(\mathbf{q})>}.$$

$I_{\mathbf{p}}$ es una forma cuadrática definida positiva (pues $E, G > 0$ y $EG - F^2 > 0$).

Podemos calcular longitudes de curvas, ángulos entre curvas y áreas en términos de los coeficientes E, F, G de la primera forma fundamental:

- **Longitudes de curvas**: sea $\boldsymbol{\alpha}$ una curva en $\mathbb{R}^3$ cuya traza esté contenida en S (de hecho, en una región de S parametrizada por una carta $\mathbb{X}$). Si $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$, con $t \in (t_1, t_2)$, entonces

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t) = \mathbb{X}_u(u(t), v(t))\, \dot{u}(t) + \mathbb{X}_v(u(t), v(t))\, \dot{v}(t)$$

  y, por tanto,

$$\text{longitud}\,(\boldsymbol{\alpha}) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{u}(t)^2\, E(u(t), v(t)) + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t)\, F(u(t), v(t)) + \dot{v}(t)^2\, G(u(t), v(t))}\, dt\,.$$

- **Ángulos entre curvas**: sean $\boldsymbol{\alpha}$ y $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$ dos curvas en S que se cortan en un punto $\mathbf{p}$. Queremos medir el ángulo que forman esas dos curvas en el punto de corte.

  Suponemos que toda la acción transcurre en una región de S parametrizada por $\mathbb{X}$. Digamos que $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ y que $\bar{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \mathbb{X}(\bar{u}(s), \bar{v}(s))$ con $t \in I$ y $s \in \bar{I}$ y que las curvas intersecan en el punto $\mathbf{p}_0 = \mathbb{X}(\mathbf{q}_0)$, donde

$$\mathbf{p}_0 = \boldsymbol{\alpha}(t_0) = \mathbb{X}(\underbrace{u(t_0), v(t_0)}_{\mathbf{q}_0}) \qquad \text{y también} \qquad \mathbf{p}_0 = \bar{\boldsymbol{\alpha}}(s_0) = \mathbb{X}(\underbrace{\bar{u}(s_0), \bar{v}(s_0)}_{\mathbf{q}_0}).$$

  Entonces, si ω es el ángulo entre las dos curvas en ese punto,

$$\begin{aligned}\cos(\omega) &= \frac{<\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_0), \dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}(s_0)>}{\|\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_0)\|\ \|\dot{\bar{\boldsymbol{\alpha}}}(s_0)\|} \\ &= \frac{E(\mathbf{q}_0)\dot{u}(t_0)\dot{\bar{u}}(s_0) + F(\mathbf{q}_0)\Big[\dot{u}(t_0)\dot{\bar{v}}(s_0) + \dot{v}(t_0)\dot{\bar{u}}(s_0)\Big] + G(\mathbf{q}_0)\dot{v}(t_0)\dot{\bar{v}}(s_0)}{\sqrt{E(\mathbf{q}_0)\dot{u}(t_0)^2 + 2F(\mathbf{q}_0)\dot{u}(t_0)\dot{v}(t_0) + G(\mathbf{q}_0)\dot{v}(t_0)^2}\sqrt{E(\mathbf{q}_0)\dot{\bar{u}}(s_0)^2 + 2F(\mathbf{q}_0)\dot{\bar{u}}(s_0)\dot{\bar{v}}(s_0) + G(\mathbf{q}_0)\dot{\bar{v}}(s_0)^2}}\end{aligned}$$

- **Áreas**: digamos que $R = \mathbb{X}(V) \subseteq S$, para cierto $V \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, el área de la región R es

$$\text{área}\,(R) = \iint_V \|\mathbb{X}_u(u, v) \times \mathbb{X}_v(u, v)\|\, du\, dv = \iint_V \sqrt{E(u, v)\, G(u, v) - F^2(u, v)}\, du\, dv\,.$$

B. La segunda forma fundamental

Definimos el **operador de forma** $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ en el punto $\mathbf{p}$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\mathbf{p}}: \quad T_{\mathbf{p}}S \quad &\longrightarrow \quad T_{\mathbf{p}}S \\ \mathbf{w} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = -\frac{d}{dt}\Big[(\mathbf{N} \circ \boldsymbol{\alpha})(t)\Big]\Big|_{t=t_0}\,,\end{aligned}$$

(que podemos escribir de manera resumida como $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = -(\mathbf{N} \dot{\circ} \boldsymbol{\alpha})(t_0))$, donde $\boldsymbol{\alpha}$ es *cualquier* curva en S que pase por $\mathbf{p}$ (esto es, $\boldsymbol{\alpha}(t_0) = \mathbf{p}$) con velocidad $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_0) = \mathbf{w}$.

El operador $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ está bien definido (no depende de la curva $\boldsymbol{\alpha}$ elegida), es lineal y es **autoadjunto**; esto es,

$$<\mathcal{F}_p(\mathbf{v}), \mathbf{w}> = <\mathbf{v}, \mathcal{F}_p(\mathbf{w})> \qquad \text{para cualesquiera vectores } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

Gracias a esto, podemos construir una nueva forma cuadrática, la **segunda forma fundamental** (de S en $\mathbf{p}$), la aplicación

$$\begin{aligned}I\!I_{\mathbf{p}}: \quad T_{\mathbf{p}}S \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \mathbf{w} \quad &\longrightarrow \quad I\!I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = <\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{v}), \mathbf{v}>\ .\end{aligned}$$

Si $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$ es un vector unitario, entonces utilizamos un nombre especial para referirnos a $I\!I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w})$: la **curvatura normal** en la dirección $\mathbf{w}$,

$$k(\mathbf{w}) = <\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}), \mathbf{w}> \qquad \text{(para } \mathbf{w} \text{ unitario).}$$

Si $k(\mathbf{w}) > 0$, entonces, *en esa dirección* $\mathbf{w}$ la superficie S se "dobla" hacia $\mathbf{N}$. Si $k(\mathbf{w}) < 0$, entonces en la dirección $\mathbf{w}$ la superficie S se "dobla" alejándose de $\mathbf{N}$.

• **Direcciones especiales**.

- Las direcciones en las que la curvatura normal $k(\mathbf{w})$ es máxima o mínima se denominan **direcciones principales**. Estos valores máximo y mínimo se conocen como **curvaturas principales**:

$$k_1 = \max_{\mathbf{w}\in T_{\mathbf{p}}S, \|\mathbf{w}\|=1} k(\mathbf{w})\,; \qquad k_2 = \min_{\mathbf{w}\in T_{\mathbf{p}}S, \|\mathbf{w}\|=1} k(\mathbf{w})\,.$$

- Las direcciones (si las hubiere) en las que $k(\mathbf{w}) = 0$ se denominan **direcciones asintóticas**.

Si $k(\mathbf{w})$ es constante en todas las direcciones ($k_1 = k_2$), entonces decimos que $\mathbf{p}$ es un **punto umbilical**. En este caso, el operador de forma $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ es, simplemente, la multiplicación por $k_1 = k_2$.

Si $\mathbf{p}$ no es umbilical, hay exactamente dos direcciones principales que además son ortogonales. Es decir, existe una base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$ (la base de **vectores principales**) formada por autovectores de $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ (la matriz del operador $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$ en esta base es diagonal):

$$\mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_1) = k_1\, \mathbf{e}_1 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{F}_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}_2) = k_2\, \mathbf{e}_2\,,$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales. Por tanto, si escribimos un vector unitario $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$ en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ como $\mathbf{w} = \cos(\theta)\,\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\,\mathbf{e}_2$, entonces

$$k(\mathbf{w}) = I\!I(\mathbf{w}) = < \mathcal{F}_p(\mathbf{w}), \mathbf{w} > = k_1\, \cos(\theta)^2 + k_2 \sin(\theta)^2\,.$$

A partir de estas curvaturas principales se definen:

- la **curvatura de Gauss**

$$\boxed{K = k_1 k_2}$$

- y la **curvatura media**

$$\boxed{H = \frac{k_1 + k_2}{2}}$$

Que son, respectivamente, el determinante y la traza (salvo división por 2) de cualquier matriz que represente al operador lineal $\mathcal{F}_{\mathbf{p}}$. Si conocemos K y H podemos recuperar las curvaturas principales como las raíces del ecuación

$$x^2 - 2Hx + K = 0 \qquad (\text{esto es, } x = H \pm \sqrt{H^2 - K}).$$

El signo de la curvatura de Gauss permite clasificar los puntos de la superficie S de la siguiente manera:

- si $K > 0$ en un punto $\mathbf{p}$ (lo que supone que o bien $k(\mathbf{w}) > 0$ o bien $k(\mathbf{w}) < 0$ para todo vector unitario $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$), entonces decimos que el punto es **elíptico**. En un entorno de un punto elíptico $\mathbf{p}$, la superficie queda "a un lado" del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$.

- si $K < 0$ en un punto $\mathbf{p}$ (lo que supone que $k(\mathbf{w})$ toma valores negativos y positivos al recorrer los vectores unitarios $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$), entonces decimos que el punto es **hiperbólico**. En cualquier entorno de un punto hiperbólico $\mathbf{p}$ hay puntos de S a ambos lados del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$.

- Si $K = 0$, entonces caben dos posibilidades:
  - o bien $k_1 = k_2 = 0$ (punto **plano**);
  - o bien una (y sólo una) de las curvaturas principales es no nula (punto **parabólico**).

Obsérvese que los puntos umbilicales son, o bien planos (si $K = 0$), o bien elípticos (si $K \neq 0$).

B.1 Coordenadas locales: fórmulas de Weingarten

Vamos a expresar todo lo anterior en coordenadas locales. Tenemos una carta $\mathbb{X}$ que parametriza un entorno del punto $\mathbf{p}$ en el que estemos trabajando, con $\mathbb{X}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$.

Todas las cantidades que aparecen a continuación, $\mathbb{X}$ y sus derivadas parciales (de primer y segundo orden), el vector normal $\mathbf{N}\circ\mathbb{X}$ y sus derivadas $(\mathbf{N}\circ\mathbb{X})_u$ y $(\mathbf{N}\circ\mathbb{X})_v$ (a las que nombraremos, simplemente, como $\mathbf{N}_u$ y $\mathbf{N}_v$), las diversas curvaturas, etc., son funciones del punto $\mathbf{q}$.

Para aligerar la notación, en lo que sigue no haremos explícita esta dependencia.

Si $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$, podremos escribir $\mathbf{w} = a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v$. Y el operador de forma resulta ser

$$\mathcal{F}(\mathbf{w}) = a\mathcal{F}(\mathbb{X}_u) + b\mathcal{F}(\mathbb{X}_v) = -a\mathbf{N}_u - b\mathbf{N}_v\,.$$

Queremos obtener la matriz del operador $\mathcal{F} : T_{\mathbf{p}}S \to T_{\mathbf{p}}S$ cuando tanto en el espacio de partida como en el de llegada consideramos la base $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$. Para ello introducimos las cantidades

$$\begin{aligned}
\boxed{e} &= <\mathcal{F}(\mathbb{X}_u), \mathbb{X}_u> = -<\mathbf{N}_u, \mathbb{X}_u> = \boxed{\mathbf{N}\cdot\mathbb{X}_{uu}}\\
\boxed{f} &= <\mathcal{F}(\mathbb{X}_u), \mathbb{X}_v> = -<\mathbf{N}_u, \mathbb{X}_v> = \boxed{\mathbf{N}\cdot\mathbb{X}_{uv}}\\
\boxed{g} &= <\mathcal{F}(\mathbb{X}_v), \mathbb{X}_v> = -<\mathbf{N}_v, \mathbb{X}_v> = \boxed{\mathbf{N}\cdot\mathbb{X}_{vv}}
\end{aligned}$$

Recuérdese que, en cada línea, las dos primeras igualdades son definiciones; la tercera es la manera más cómoda de calcular estas cantidades (donde hemos utilizado que $\mathbf{N}$ es perpendicular a $\mathbb{X}_u$ y a $\mathbb{X}_v$).

La segunda forma fundamental, en términos de estas cantidades, viene dada por: si $\mathbf{w} = a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v$, entonces

$$\boxed{II(\mathbf{w}) = a^2 e + 2abf + b^2 g}$$

El operador $\mathcal{F}$ queda determinado por su acción sobre los vectores $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$ de la base:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathbb{X}_u) &= \frac{eG - fF}{EG - F^2}\mathbb{X}_u + \frac{fE - eF}{EG - F^2}\mathbb{X}_v\\
\mathcal{F}(\mathbb{X}_v) &= \frac{fG - Fg}{EG - F^2}\mathbb{X}_u + \frac{gE - fF}{EG - F^2}\mathbb{X}_v
\end{aligned}$$

Las curvaturas de Gauss y media son, respectivamente,

$$\boxed{K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}}$$

Un vector (unitario) del plano tangente $\mathbf{w} = a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v$ es dirección asintótica si $k(\mathbf{w}) = 0$. Esto es, si $<\mathcal{F}(\mathbf{w}), \mathbf{w}> = 0$. Lo que, puesto en coordenadas, supone que

$$a^2 e + 2ab\,f + b^2\,g = 0\,.$$

Un vector (unitario) del plano tangente $\mathbf{w} = a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v$ es dirección principal si $k(\mathbf{w})$ es máximo o mínimo (coincide con k_1 o con k_2). Esto es, si $\mathbf{w}$ es autovector del operador de forma (coincide con $\mathbf{e}_1$ o con $\mathbf{e}_2$). En otras palabras, si $\mathcal{F}(\mathbf{w}) \times \mathbf{w} = \mathbf{0}$. En coordenadas, si y solo si

$$\begin{vmatrix} b^2 & -ab & a^2\\ E & F & G\\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

C. Curvas en superficies

Sea $\boldsymbol{\alpha}(s)$ una curva parametrizada por longitud de arco cuya traza esté contenida en una superficie S. Sea $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}(s)$ el vector tangente a la curva en el punto $\boldsymbol{\alpha}(s)$ (esto es, $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}(s) = \boldsymbol{\alpha}'(s)$). Construimos un triedro ortonormal "adaptado" a la superficie añadiendo el vector normal a la superficie en el punto de interés, esto es, el vector $(\mathbf{N} \circ \boldsymbol{\alpha})(s)$, junto con el **vector conormal**, definido mediante $\mathbf{C}(s) = \mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}(s) \times (\mathbf{N} \circ \boldsymbol{\alpha})(s)$. Estos tres vectores (unitarios y perpendiculares) forman el **triedro de Darboux** en el punto $\boldsymbol{\alpha}(s)$. En lo que sigue no haremos explícita la dependencia en s. El símbolo "$\,'\,$" significará derivada con respecto a s. (Nota: aquí, $\mathbf{N}'$ significa la variación del vector normal a S cuando nos restringimos a la curva $\boldsymbol{\alpha}$; en otras palabras, $-\mathcal{F}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}})$).

Las ecuaciones de variación de estas cantidades son:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}' \\ \mathbf{N}' \\ \mathbf{C}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_n & \kappa_g \\ -k_n & 0 & -\tau_g \\ -\kappa_g & \tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix}},$$

donde k_n es la curvatura normal en la dirección $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}$, esto es, $k(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}})$, κ_g se conoce como **curvatura geodésica** y τ_g como **torsión geodésica**.

Podemos relacionar estas cantidades con la curvatura y la torsión habituales de las curvas, que aquí nombraremos como $\kappa_{\boldsymbol{\alpha}}$ y $\tau_{\boldsymbol{\alpha}}$, mediante las siguientes fórmulas:

$$\kappa_{\boldsymbol{\alpha}} = \sqrt{k_n^2 + \kappa_g^2} \qquad \text{y} \qquad \tau_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{k_n'\,\kappa_g - k_n\,\kappa_g'}{k_n^2 + \kappa_g^2} + \tau_g\,.$$

• **Curvas asintóticas**, Decimos que una curva $\boldsymbol{\alpha}$ es **asintótica** si $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}$ es siempre una dirección asintótica (es decir, si $k_n = 0$ en cada punto de la curva). En otras palabras, si $< \mathcal{F}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}), \mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}} >= 0$ en cada punto de la curva (recuérdese que $\mathcal{F}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}) = -\mathbf{N}'$ y véase el sistema de ecuaciones diferenciales anterior).

Si la curva está en un entorno parametrizado por $\mathbb{X}$ y la escribimos de la forma $\boldsymbol{\alpha}(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$, con $t \in I$, entonces las funciones $u(t)$ y $v(t)$ han de verificar la ecuación diferencial siguiente:

$$u'(t)^2\, e(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)\, f(u(t), v(t)) + v'(t)^2\, g(u(t), v(t)) = 0\,.$$

• **Líneas de curvatura**. Decimos que una curva $\boldsymbol{\alpha}$ es **línea de curvatura** si $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}$ es siempre una dirección principal. En otras palabras, si $\mathcal{F}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}) \times \mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{0}$ en cada punto de la curva. Así que $\mathcal{F}(\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}})$ (esto es, $-\mathbf{N}'$) debe ser paralelo a $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}$, lo que supone que $\tau_g = 0$ en cada punto de la curva.

Poniendo coordenadas (véase el punto anterior; ahora ya no haremos explícita la dependencia en t), las funciones u y v han de verificar la ecuación diferencial

$$\begin{vmatrix} v'^2 & -u'v' & u'^2 \\ E & F & G \\ e & f & g \end{vmatrix} = 0$$

• **Geodésicas**. Por último, decimos que una curva $\boldsymbol{\alpha}$ es **geodésica** si la curvatura geodésica $\kappa_g = 0$ en cada punto. Lo que nos dice que el vector $\mathbf{t}_{\boldsymbol{\alpha}}'$ (es decir, $\boldsymbol{\alpha}''$, si es que $\boldsymbol{\alpha}$ está parametrizada por longitud de arco), ha de ser paralelo a N en cada punto.

Vamos a analizar en coordenadas la cuestión de las geodésicas *sólo* en el caso en que la parametrización $\mathbb{X}$ cumpla que $F \equiv 0$.

Supongamos que la curva viene dada por $\boldsymbol{\alpha}(s) = \mathbb{X}(u(s), v(s))$. La condición de que s sea parámetro longitud de arco supone que

$$u'^2 E + v'^2\, G = 1\,.$$

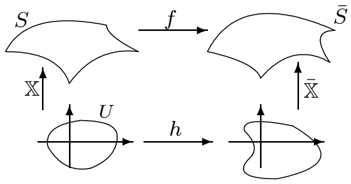
Imponiendo que $\boldsymbol{\alpha}''$ sea perpendicular tanto a $\mathbb{X}_u$ como a $\mathbb{X}_v$, obtenemos el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\begin{cases} 0 = 2u''\, E + u'^2\, E_u - v'^2\, G_u + 2u'v'\, E_v \\ 0 = 2v''\, G - u'^2\, E_v + v'^2\, G_v + 2u'v'\, G_u \end{cases}$$

D. Geometría intrínseca

Tenemos una aplicación $f : S \to \bar{S}$ entre dos superficies. Decimos que f es diferenciable si, para cada $\mathbf{p} \in S$, existen cartas $\mathbb{X}$ y $\bar{\mathbb{X}}$ (de S y $\bar{S}$, respectivamente),

$$\mathbb{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow S\,, \qquad \bar{\mathbb{X}} : \bar{U} \longrightarrow \bar{S}$$



con $\mathbf{p} \in \mathbb{X}(U)$, $f(\mathbf{p}) \in \bar{\mathbb{X}}(\bar{U})$ y $f(\mathbb{X}(U)) \subset \bar{\mathbb{X}}(\bar{U})$ de manera que

$$h = \bar{\mathbb{X}}^{-1} \circ f \circ \mathbb{X} : U \longrightarrow \bar{U}$$

sea diferenciable.

Diremos que f es un **difeomorfismo** de S en $\bar{S}$ si tanto f como f^{-1} son diferenciables.

Una aplicación $f : S \to \bar{S}$ diferenciable induce una aplicación (lineal) entre los respectivos planos tangentes: la **aplicación tangente** $T_{\mathbf{p}}f$, definida mediante

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{p}}f : T_{\mathbf{p}}S \quad &\longrightarrow \quad T_{f(\mathbf{p})}\bar{S} \\ \mathbf{w} \quad &\longrightarrow \quad (T_{\mathbf{p}}f)(\mathbf{w}) = \frac{d}{dt}\Big[(f \circ \boldsymbol{\alpha})(t)\Big]\Big|_{t=t_0} \end{aligned}$$

donde $\boldsymbol{\alpha}$ es cualquier curva en S que pase por $\mathbf{p}$ (esto es, $\boldsymbol{\alpha}(t_0) = \mathbf{p}$) con velocidad $\dot{\boldsymbol{\alpha}}(t_0) = \mathbf{w}$.

La expresión de $T_{\mathbf{p}}f$ en términos de las bases $\{\mathbb{X}_u, \mathbb{X}_v\}$ y $\{\bar{\mathbb{X}}_x, \bar{\mathbb{X}}_y\}$ (de $T_{\mathbf{p}}S$ y $T_{f(\mathbf{p})}\bar{S}$, respectivamente) es la siguiente: si $\mathbf{w} = a\mathbb{X}_u + b\mathbb{X}_v$, entonces

$$T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w}) = \bar{a}\bar{\mathbb{X}}_x + \bar{b}\bar{\mathbb{X}}_y\,, \qquad \text{con} \qquad \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

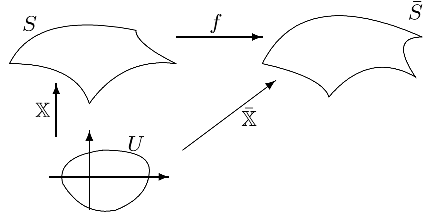
y donde la función $h = \bar{\mathbb{X}}^{-1} \circ f \circ \mathbb{X}$ es $h(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$.

Un difeomorfismo $f : S \to \bar{S}$ es una **isometría** si conserva la longitud de los vectores tangentes. Esto es, si para todo $\mathbf{p} \in S$,

$$\|T_{\mathbf{p}}f(\mathbf{w})\| = \|w\| \qquad \text{para todo } \mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S.$$

Esto supone que la aplicación f conserva las longitudes de las curvas. Es decir, la longitud de una curva $\boldsymbol{\alpha} \subset S$ coincide con la de la curva imagen $f(\boldsymbol{\alpha}) \subset \bar{S}$.

Si $f : S \to \bar{S}$ es una isometría, $\mathbb{X}$ es una carta de S y consideramos la carta de $\bar{S}$ dada por $\bar{\mathbb{X}} = f \circ \mathbb{X}$, entonces las funciones E, F, G coinciden con las correspondientes $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$. Y recíprocamente: si existen cartas $\mathbb{X} : U \to S$ y $\bar{\mathbb{X}} : U \to \bar{S}$ tales que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ y $G = \bar{G}$ en U, entonces la aplicación $f = \bar{\mathbb{X}} \circ \mathbb{X}^{-1} : \mathbb{X}(U) \to \bar{S}$ es una isometría.



Teorema *egregium* de Gauss: si $f : S \to \bar{S}$ es una isometría, entonces, para todo $\mathbf{p} \in S$, la curvatura gaussiana (de la superficie S) en $\mathbf{p}$ coincide con la curvatura gaussiana (de la superficie $\bar{S}$) en el correspondiente $f(\mathbf{p})$.

Este resultado es consecuencia de la **fórmula de Gauss**, que permite escribir la curvatura únicamente en términos de los coeficientes de la primera forma fundamental y sus derivadas (pese a que la definición del concepto involucraba, en principio, los coeficientes de la segunda forma fundamental). Esta fórmula, en el caso $F \equiv 0$, es la siguiente:

$$\boxed{K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right]}$$