

Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2005-2006

Sobre superficies (I)

NOTA. Estas páginas no pretenden ser un resumen de lo estudiado en el curso sobre superficies. Son, simplemente, una exposición ordenada de los distintos conceptos y fórmulas que han ido apareciendo.

A. Definición de superficie

Decimos que un conjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ es una **superficie** si, para cada punto $\mathbf{p} \in S$, existen entornos $V \subset \mathbb{R}^3$ y $U \subseteq \mathbb{R}^2$ y una **carta** (o parametrización local) $\mathbb{X}$

$$\begin{aligned} \mathbb{X}: \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longrightarrow \mathbb{X}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \end{aligned} \quad \text{con } \mathbb{X}(U) = S \cap V$$

de manera que

- i) $\mathbb{X}$ es diferenciable;
- ii) $\mathbb{X}$ es un homeomorfismo de U en $S \cap V$ (esto es, $\mathbb{X}$ es inyectiva y la inversa $\mathbb{X}^{-1}$ es continua);
- iii) Para todo $\mathbf{q} \in U$, la diferencial $d\mathbb{X}_{\mathbf{q}}$ es inyectiva (esto es, $\mathbb{X}_u(\mathbf{q})$ y $\mathbb{X}_v(\mathbf{q})$ son linealmente independientes).

B. Plano tangente

Dado un punto $\mathbf{p} \in S$, el **plano tangente** $T_{\mathbf{p}}S$ (a la superficie S en el punto $\mathbf{p}$) es el conjunto de los vectores tangentes en $\mathbf{p}$ a las curvas $\alpha \subset S$ que pasan por $\mathbf{p}$.

El **vector normal** $\mathbf{N}(\mathbf{p})$ a la superficie en el punto $\mathbf{p}$ es el único vector (salvo signo) unitario y perpendicular a los vectores del plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$.

Al poner coordenadas: si $\mathbb{X}(u, v)$ es una carta que parametriza un entorno de $\mathbf{p}$, con $\mathbb{X}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, entonces los vectores $\{\mathbb{X}_u(\mathbf{q}), \mathbb{X}_v(\mathbf{q})\}$ forman una base de $T_{\mathbf{p}}S$.

Siguiendo la notación de Gauss,

$$\boxed{E(\mathbf{q}) = \langle \mathbb{X}_u(\mathbf{q}), \mathbb{X}_u(\mathbf{q}) \rangle}, \quad \boxed{F(\mathbf{q}) = \langle \mathbb{X}_u(\mathbf{q}), \mathbb{X}_v(\mathbf{q}) \rangle}, \quad \boxed{G(\mathbf{q}) = \langle \mathbb{X}_v(\mathbf{q}), \mathbb{X}_v(\mathbf{q}) \rangle}.$$

El vector normal viene dado por

$$\mathbf{N}(\mathbf{p}) = (\mathbf{N} \circ \mathbb{X})(\mathbf{q}) = \frac{\mathbb{X}_u(\mathbf{q}) \times \mathbb{X}_v(\mathbf{q})}{\|\mathbb{X}_u(\mathbf{q}) \times \mathbb{X}_v(\mathbf{q})\|}.$$

C. Longitud de una curva sobre una superficie

Sea α una curva en $\mathbb{R}^3$ cuya traza esté contenida en S (de hecho, en una región de S parametrizada por una carta $\mathbb{X}$). Si $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$, con $t \in (t_1, t_2)$, entonces

$$\dot{\alpha}(t) = \mathbb{X}_u(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + \mathbb{X}_v(u(t), v(t)) \dot{v}(t)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \text{longitud}(\alpha) &= \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{\alpha}(t)\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\alpha}(t) \cdot \dot{\alpha}(t)} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{u}(t)^2 E(u(t), v(t)) + 2\dot{u}(t)\dot{v}(t) F(u(t), v(t)) + \dot{v}(t)^2 G(u(t), v(t))} dt. \end{aligned}$$

D. Ángulo entre dos curvas sobre una superficie

Sean α y $\bar{\alpha}$ dos curvas en S que se cortan en un punto $\mathbf{p}$. Queremos medir el ángulo que forman esas dos curvas en el punto de corte.

Suponemos que toda la acción transcurre en una región de S parametrizada por $\mathbb{X}$. Digamos que $\alpha(t) = \mathbb{X}(u(t), v(t))$ y que $\bar{\alpha}(s) = \mathbb{X}(\bar{u}(s), \bar{v}(s))$ con $t \in I$ y $s \in \bar{I}$ y que las curvas intersecan en el punto $\mathbf{p}_0 = \mathbb{X}(\mathbf{q}_0)$, donde

$$\mathbf{p}_0 = \alpha(t_0) = \mathbb{X}(\underbrace{u(t_0), v(t_0)}_{\mathbf{q}_0}) \quad \text{y también} \quad \mathbf{p}_0 = \bar{\alpha}(s_0) = \mathbb{X}(\underbrace{\bar{u}(s_0), \bar{v}(s_0)}_{\mathbf{q}_0}).$$

Entonces, si ω es el ángulo entre las dos curvas en ese punto,

$$\begin{aligned} \cos(\omega) &= \frac{\langle \dot{\alpha}(t_0), \dot{\bar{\alpha}}(s_0) \rangle}{\|\dot{\alpha}(t_0)\| \|\dot{\bar{\alpha}}(s_0)\|} \\ &= \frac{E(\mathbf{q}_0)\dot{u}(t_0)\dot{\bar{u}}(s_0) + F(\mathbf{q}_0)[\dot{u}(t_0)\dot{\bar{v}}(s_0) + \dot{v}(t_0)\dot{\bar{u}}(s_0)] + G(\mathbf{q}_0)\dot{v}(t_0)\dot{\bar{v}}(s_0)}{\sqrt{E(\mathbf{q}_0)\dot{u}(t_0)^2 + 2F(\mathbf{q}_0)\dot{u}(t_0)\dot{v}(t_0) + G(\mathbf{q}_0)\dot{v}(t_0)^2} \sqrt{E(\mathbf{q}_0)\dot{\bar{u}}(s_0)^2 + 2F(\mathbf{q}_0)\dot{\bar{u}}(s_0)\dot{\bar{v}}(s_0) + G(\mathbf{q}_0)\dot{\bar{v}}(s_0)^2}} \end{aligned}$$

E. Área de regiones sobre una superficie

Digamos que $R = \mathbb{X}(V) \subseteq S$, para cierto $V \subset \mathbb{R}^2$. Entonces, el área de la región R es

$$\text{área}(R) = \iint_V \|\mathbb{X}_u(u, v) \times \mathbb{X}_v(u, v)\| du dv = \iint_V \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} du dv.$$

F. La primera forma fundamental

Sea $\mathbf{p} \in S$ y consideremos su plano tangente $T_{\mathbf{p}}S$. La primera forma fundamental (de S en $\mathbf{p}$) es la aplicación

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{p}} : T_{\mathbf{p}}S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{w} &\longrightarrow I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle, \end{aligned}$$

donde $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ significa, simplemente, el producto escalar en $\mathbb{R}^3$.

Si $\mathbb{X}$ es una carta en $\mathbf{p}$, con $\mathbb{X}(\mathbf{q}) = \mathbf{p}$, entonces $\{\mathbb{X}_u(\mathbf{q}), \mathbb{X}_v(\mathbf{q})\}$ es una base de $T_{\mathbf{p}}S$. En términos de esa base, si escribimos un vector $\mathbf{w} \in T_{\mathbf{p}}S$ como $\mathbf{w} = a\mathbb{X}_u(\mathbf{q}) + b\mathbb{X}_v(\mathbf{q})$, entonces

$$\boxed{I_{\mathbf{p}}(\mathbf{w}) = a^2 E(\mathbf{q}) + 2ab F(\mathbf{q}) + b^2 G(\mathbf{q})},$$

$I_{\mathbf{p}}$ es una forma cuadrática definida positiva (pues $E, G > 0$ y $EG - F^2 > 0$).