Geometría II
Segundo de Matemáticas
Curso 2005-2006

Sobre curvas

NOTA. Estas páginas no pretenden ser un resumen de lo estudiado en el curso sobre curvas. Son, simplemente, una exposición ordenada de los distintos conceptos y fórmulas que han ido apareciendo.

Una **curva regular** $\boldsymbol{\gamma}$ es una aplicación de un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{array}{rccl} \boldsymbol{\gamma}: & I \subseteq \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & t & \longmapsto & \boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

diferenciable y tal que el vector "velocidad"

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \quad \text{es distinto de } (0,0,0) \text{ para cada } t \in I,$$

donde el punto " $\dot{}$ " significa derivada con respecto a t. Su **traza** es $\boldsymbol{\gamma}(I)$, el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^3$ que son imagen por $\boldsymbol{\gamma}$ del intervalo I. A t nos referimos como el **parámetro** de la curva.

Dado $t \in I$, la **longitud de arco** de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ desde el punto $t_0 \in I$ es

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(u)\| \, du$$

Diremos que la curva está **parametrizada por longitud de arco** si $\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\| = 1$ para cada $t \in I$ (en cuyo caso $s(t) = t$ salvo una constante).

NOTACIÓN: en lo que sigue, si la curva está parametrizada por longitud de arco, reservaremos el símbolo s para su parámetro (t significará parámetro arbitrario). En el primer caso, para las derivadas con respecto a s utilizaremos $\boldsymbol{\gamma}'(s)$, $\boldsymbol{\gamma}''(s)$, etc.; mientras que, en parámetro arbitrario, para las derivadas con respecto a t escribiremos $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, $\ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)$, etc.

A. Curvas parametrizadas por longitud de arco

Como $\|\boldsymbol{\gamma}'(s)\| = 1$ para todo s, los vectores $\boldsymbol{\gamma}'(s)$ y $\boldsymbol{\gamma}''(s)$ son perpendiculares para todo s. En lo que sigue supondremos que la curva es **birregular**, es decir, $\|\boldsymbol{\gamma}''(s)\| \neq 0$ para todo s.

- El **vector tangente** a la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ se define como

$$\mathbf{t}(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s)\,.$$

- La **curvatura** de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ será

$$\kappa(s) = \|\boldsymbol{\gamma}''(s)\|\,.$$

- El **vector normal** a la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ es

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\boldsymbol{\gamma}''(s)}{\|\boldsymbol{\gamma}''(s)\|} = \frac{\boldsymbol{\gamma}''(s)}{\kappa(s)}$$

- El **vector binormal** a la curva $\boldsymbol{\gamma}$ es el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ es

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s)\,.$$

Los vectores $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ son perpendiculares entre sí y tienen longitud unidad. Forman un triedro (orientado positivamente), llamado el **triedro de Frenet** de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en s.

El plano definido por los vectores $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{n}(s)$ y que pasa por el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$ se conoce como el **plano osculador** de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$. La ecuación de este plano es

$$(\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \mathbf{b}(s) = 0\,.$$

Análogamente, se definen los planos **rectificante** (definido por $\mathbf{t}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$) y **normal** (definido por $\mathbf{n}(s)$ y $\mathbf{b}(s)$). Las respectivas ecuaciones son:

$$\text{(rectificante)}: \quad (\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \mathbf{n}(s) = 0\,; \qquad \text{(normal)}: \quad (\mathbf{x} - \boldsymbol{\gamma}(s)) \cdot \mathbf{t}(s) = 0\,.$$

El vector que mide la variación del vector tangente es

$$(1) \qquad \mathbf{t}'(s) = \kappa(s)\,\mathbf{n}(s)\,.$$

El vector $\mathbf{b}'(s)$ resulta ser paralelo a $\mathbf{n}(s)$, de manera que

$$(2) \qquad \mathbf{b}'(s) = \tau(s)\,\mathbf{n}(s)\,,$$

donde la función $\tau(s)$ es la **torsión**[1] de la curva $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(s)$. En términos de las derivadas de la curva,

$$\tau(s) = -\frac{(\boldsymbol{\gamma}'(s) \times \boldsymbol{\gamma}''(s)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'''(s)}{\|\boldsymbol{\gamma}''(s)\|^2}\,.$$

Por último,

$$(3) \qquad \mathbf{n}'(s) = -\kappa(s)\,\mathbf{t}(s) - \tau(s)\,\mathbf{b}(s)\,.$$

Las identidades (1) – (3) son las llamadas **fórmulas de Frenet**.

B. Curvas con parametrización arbitraria

Habitualmente, no es viable (re)parametrizar una curva dada por longitud de arco. Así que conviene disponer de las fórmulas de las cantidades definidas anteriormente en términos de las derivadas con respecto al parámetro original. Ahí van (nótese que, en el triedro de Frenet, conviene calcular en orden $\mathbf{t}(t) \to \mathbf{b}(t) \to \mathbf{n}(t)$):

$$\begin{aligned} \text{curvatura:} \quad \kappa(t) &= \frac{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|^3} \\ \text{torsión:} \quad \tau(t) &= -\frac{(\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)) \cdot \dddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|^2} \end{aligned} \qquad \text{triedro de Frenet}: \begin{cases} \mathbf{t}(t) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|} \\ \mathbf{b}(t) = \dfrac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \times \ddot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|} \\ \mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \mathbf{t}(t) \end{cases}$$

C. Curvas planas

En el caso de las curvas planas ($\tau \equiv 0$), podemos dar un signo a la curvatura.

Digamos que la curva plana $\boldsymbol{\gamma} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ viene dada por

$$\boldsymbol{\gamma}(t) = (x(t), y(t))\,.$$

Su vector velocidad es $\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ y su vector tangente,

$$\mathbf{t}(t) = \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)}{\|\dot{\boldsymbol{\gamma}}(t)\|} = \frac{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}$$

Definimos entonces el vector normal como el vector unitario y perpendicular (ángulo de $\pi/2$ *en sentido horario*) a $\mathbf{t}(t)$, esto es, como

$$\mathbf{n}(t) = \frac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}}\,.$$

Así, la curvatura de $\boldsymbol{\gamma}$ en el punto $\boldsymbol{\gamma}(t)$ resulta ser

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)^{3/2}}\,,$$

una cantidad con signo (y cuyo módulo coincide, por supuesto, con la curvatura habitual).

[1] En algunos textos se define la torsión de manera que en la fórmula (2) aparece un signo menos.