Cálculo I (grupo 715)
Primer curso del Grado en Matemáticas, UAM, Curso 2010-2011

Control 2, 3 de diciembre de 2010

Apellidos, Nombre ....

---

1. Supongamos que la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ cumple que, para cualesquiera $y, z \in [a, b]$,

$$|f(y) - f(z)| \leq K \cdot |y - z|,$$

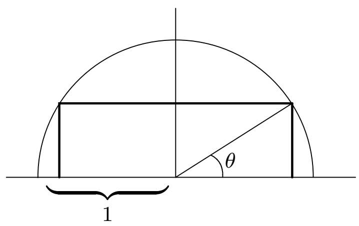
donde K es una cierta constante. Demuestra que $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$.

2. Definimos la función $f(x)$ como

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x \leq 1; \\ a \operatorname{sen}(\ln(x)) & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un cierto parámetro.
a) ¿Para qué valores de a la función es continua? Justifica tu respuesta.
a) ¿Para qué valores de a la función es además derivable? Justifica tu respuesta.

3. Queremos determinar el rectángulo de área máxima de entre los que se pueden inscribir en una semicircunferencia de radio 1 (véase el dibujo). Obsérvese, en la figura, que cada uno de los posibles rectángulos se corresponde con un ángulo θ (entre 0 y $\pi/2$). Calcula el área de cada rectángulo en términos de θ y deduce cuál es el rectángulo de área máxima (es decir, da sus dimensiones y el área que tiene).



4. Halla la derivada de la función

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\ln(x^2)}\right).$$