SOLUCIÓN PARCIAL 3

(1) Tenemos que hallar $\| \mathrm{proy}_{(U_1+U_2)^\perp}(\vec{PQ}) \|$, donde $P \in L_1$, $Q \in L_2$, y U_1, U_2 son los espacios vectoriales directores de L_1 y L_2, respectivamente.

$(U_1+U_2) = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\}$. Claramente,

$$(U_1+U_2)^\perp = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

(Si se quiere hacer el cálculo, si $\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \in (U_1+U_2)^\perp$

$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = a = 0$, $\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle = b = 0$,

$\left\langle \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{pmatrix} \right\rangle = -a+b-c = 0 \Rightarrow c = 0$,)

Si $P = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix}5\\2\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{PQ} = \begin{pmatrix}4\\0\\-2\\-3\end{pmatrix}$.

La proyección de $\begin{pmatrix}4\\0\\-2\\-3\end{pmatrix}$ sobre $\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ es claramente $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\end{pmatrix}$, y por tanto $\boxed{d(L_1, L_2) = 3}$.

(Si se quiere hacer el cálculo, si $\mathrm{proy}_{(U_1+U_2)^\perp} \begin{pmatrix}4\\0\\-2\\-3\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$,

$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix}4\\0\\-2\\-3\end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = -3-\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -3$

$\Rightarrow$ proyección es $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{d(L_1, L_2) = \left\| \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-3\end{pmatrix} \right\| = 3}$

2

a) Clasificamos $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$. No es autoadjunta, así que tiene la forma $\left(\begin{array}{c|cc}\pm 1&0&0\\\hline 0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{array}\right)$. Su det es 1, y por tanto es $\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&\cos\alpha&-\operatorname{sen}\alpha\\0&\operatorname{sen}\alpha&\cos\alpha\end{array}\right)$; su traza es 1, así que $1+2\cos\alpha=1 \Rightarrow \cos\alpha=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=\frac{\pi}{2}}$. Así que A es una rotación de ángulo $\frac{\pi}{2}$ alrededor del eje x.

b) Hallemos el vector de desplazamiento $\vec{d}=\text{proy}_{Ker(A-I)}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$.

$A-I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix} \Rightarrow Ker(A-I)=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ (esto ya lo sabíamos pues es el eje de giro de A).

La proyección de $\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ sobre $\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ es claramente $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$, y por tanto, $\boxed{\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}$.

c) Hallamos la variedad característica $L=\{P: f(P)=P+\vec{d}\}$. Esto nos da el eje de giro de f.

$$f\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow (A-I)\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}$$

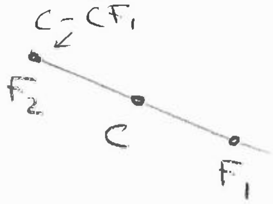
$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-b-c=-2\\b-c=2\end{cases} \Rightarrow \boxed{c=0,\ b=2}.$$

a libre.

Por tanto, $L=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$.

<u>Conclusión</u>: movimiento helicoidal de 90°, con <u>eje</u> $\boxed{L=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}}$, y <u>desplazamiento</u> $\boxed{\vec{d}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}$

3 a) El centro es un punto que está en ambas asíntotas, así que $\boxed{C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$.



$$\boxed{F_2 = C - \vec{CF_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{c = \|\vec{CF_1}\| = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}}$$

b) El eje principal contiene C, F_1 y F_2. Por tanto, un vector director unitario es $\vec{u}_1 = \dfrac{\vec{CF_1}}{\|\vec{CF_1}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, y por tanto el eje principal es

$$\boxed{e_1 : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.}$$

El eje secundario es perpendicular al principal, así que un vector director es $\vec{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (notar que $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ está orientado como la base canónica).

Por tanto el eje secundario es

$$\boxed{e_2 : \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.}$$

c) Para hallar a, b, usamos las asíntotas. Sabemos que los vectores directores de las asíntotas son $a\vec{u}_1 \pm b\vec{u}_2$. Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es paralelo a } a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3a+b \\ -a+3b \end{pmatrix}$$

Esto implica $\dfrac{2}{3a+b} = \dfrac{1}{-a+3b} \Rightarrow -2a+6b = 3a+b \Rightarrow \boxed{a=b}$

Por otro lado, $10 = c^2 = a^2+b^2 = 2a^2 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{5} = b}$

(3 c, cont.)

Esto implica que la forma canónica es (en ciertas coordenadas x', y')

$$\boxed{\frac{x'^2}{5} - \frac{y'^2}{5} = 1}$$

(Otra manera de hallar a, b es la siguiente:

El punto $P_t = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ está en una asíntota. Cuando $t \to \infty$, el punto se acerca a la hipérbola tanto como queramos. Por tanto, cuando $t \to \infty$, el punto satisface la ecuación de la hipérbola, o sea,

$$\lim_{t \to \infty} \left| d(F_1, P_t) - d(F_2, P_t) \right| = 2a$$

$$d(F_1, P_t) = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -3+2t \\ 1+t \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(2t-3)^2 + (t+1)^2}$$

$$d(F_2, P_t) = \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 3+2t \\ t-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(2t+3)^2 + (t-1)^2}$$

$$\Rightarrow \pm 2a = \lim_{t \to \infty} \left(\sqrt{(2t-3)^2 + (t+1)^2} - \sqrt{(2t+3)^2 + (t-1)^2} \right)$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{(2t-3)^2 + (t+1)^2 - (2t+3)^2 - (t-1)^2}{\sqrt{(2t-3)^2 + (t+1)^2} + \sqrt{(2t+3)^2 + (t-1)^2}}$$

$$= \lim_{t \to \infty} \frac{-20t}{\sqrt{5t^2 + O(t)} + \sqrt{5t^2 + O(t)}} = \frac{-20}{2\sqrt{5}} = -2\sqrt{5}.$$

Por tanto, $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10-5} = \sqrt{5}$.)

d) Cambio de coordenadas: como el centro es $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$\boxed{\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$$

(o, moviendo el $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ al otro lado,

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' + \frac{7}{\sqrt{10}} \\ y' + \frac{9}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}}$$

(3e), cont).

La ecuación original se puede obtener de la forma canónica usando el cambio de variable:

$$\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}.$$

$$x' = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(3(x-3)-(y-2)\right), \quad y' = \frac{1}{\sqrt{10}}\left((x-3)+3(y-2)\right)$$

$\Rightarrow$ la ecuación es $\boxed{\dfrac{(3(x-3)-(y-2))^2}{50} - \dfrac{((x-3)+3(y-2))^2}{50} = 1.}$ ✓

Desarrollando queda:

$$\boxed{4x^2-6xy-4y^2-12x+34y-41=0}$$ ✓

Otra manera: $P=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ está en la cónica $\Leftrightarrow$

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)| = 2a = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2+(y-1)^2} - \sqrt{x^2+(y-3)^2} = \pm 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-6)^2+(y-1)^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2} \pm 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x-6)^2+(y-1)^2}_{x^2-12x+36+y^2-2y+1} = \underbrace{x^2+(y-3)^2}_{x^2+y^2-6y+9} \pm 4\sqrt{5}\sqrt{x^2+(y-3)^2} + 20$$

$$\Rightarrow -12x+4y+8 = \pm 4\sqrt{5}\sqrt{x^2+(y-3)^2} \Rightarrow -3x+y+2 = \pm\sqrt{5}\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\Rightarrow (-3x+y+2)^2 = 5(x^2+(y-3)^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x^2+y^2+4-6xy-12x+4y = 5x^2+5y^2-30y+45$$

$$\Rightarrow \boxed{4x^2-6xy-4y^2-12x+34y-41=0}$$