SOLUCIÓN PARCIAL 2

1 a) $x^2-4xy-3z^2+2zx-4yz$

$= x^2-4xy-z^2-2zx\boxed{-2z^2-4zy-2y^2}+2y^2$

$= \boxed{2x^2-4xy+2y^2}-x^2-2zx-z^2\boxed{-2z^2-4zy-2y^2}$

$= \boxed{2(x-y)^2-(x+z)^2-2(z+y)^2}$

$= \boxed{2u^2-v^2-2w^2}$ donde $u=x-y$

$v=x+z$

$w=z+y$.

b) Es no degenerada porque tiene rango 3, y $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ (su matriz en la nueva base es $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}$, que tiene rango 3).

Es indefinida:

$f(0,0,1)=-3 \Rightarrow$ No es definida positiva

$f(1,0,0)=1 \Rightarrow$ No es definida negativa.

Por tanto, es indefinida.

c) Índice de inercia positivo: $\boxed{1}$

" " " negativo: $\boxed{2}$.

Alternativa a 1) a)

La matriz de f es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$ Hallemos sus autovalores.

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & -\lambda & -2 \\ 1 & -2 & -3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -\lambda^3 - 2\lambda^2 + 12\lambda + 16 = 0.$$ Hay que resolver

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - 12\lambda - 16 = 0.$$

Hacer Rufini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & -12 & -16 \\ -4 & & -4 & 8 & 16 \\ \hline & 1 & -2 & -4 & \boxed{0} \end{array} \quad \Rightarrow \lambda = -4$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\lambda = 1 \pm \sqrt{5}}.$$

En la nueva base f se expresa como

$$\boxed{f(u, v, w) = -4u^2 + (1+\sqrt{5})v^2 - (\sqrt{5}-1)w^2.}$$

(2) Pongamos $L_1 = P + U$, con $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $U = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$,

$L_2 = Q + W$, con $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $W = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$L_1 \cap L_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow \overrightarrow{PQ} \in U + W$.

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Resolvemos:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_4 - 2R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

✗ no es posible

No tiene solución; por tanto $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.

¿Son paralelas?

No: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$, pero no pertenece a U, y por tanto, $W \not\subset U$.

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U$, pero no pertenece a W, y por tanto $U \not\subset W$.

Conclusión: $\boxed{L_1 \text{ y } L_2 \text{ se cruzan}}$

(3)

a) En la referencia dada, podemos escribir L_1 en coordenadas como

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left\{ \underset{\vec{v}_1 - \vec{v}_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{\vec{v}_2 + \vec{v}_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right\}.$$

Es decir, L_1 consiste en los puntos $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ tales que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$ Esto ocurre si y sólo si

$\begin{pmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 2 \\ x_3 \\ x_4 + 1 \end{pmatrix}$ es una combinación lineal de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

lo cual ocurre si y sólo si el rango de

$$\begin{pmatrix} x_1 - 1 & 1 & 0 \\ x_2 - 2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \\ x_4 + 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ es 2. $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 - 1 & 1 & 0 \\ x_2 - 2 & 0 & 1 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - 1 & 1 & 0 \\ x_2 - 2 & 0 & 1 \\ x_4 + 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - x_2 = -2 \\ x_4 + 1 + x_1 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{L_1 : \begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}}$$

b) Resolvamos el sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_4 = -2 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x_1 = -2 + x_4 \\ x_2 = 3 - x_3 \end{array}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.}$$

c) Para hallar $L_1 \cap L_2$, resolvemos:

$$L_2 \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad L_2 \begin{cases} x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{l} L_1 - L_4 \rightarrow \\ \rightarrow \\ L_3 - L_2 \rightarrow \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \rightarrow \\ \rightarrow \\ \frac{L_3}{2} \Rightarrow \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{array}{l} \frac{L_1}{-2} \rightarrow \\ L_2 - L_3 \rightarrow \\ \\ L_4 - \frac{L_1}{-2} \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{L_1 \cap L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.}$$

d) Como $L_1 \cap L_2 \neq \phi$, y $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$,

$$\dim(L_1 + L_2) = \dim(L_1) + \dim(L_2) - \dim(L_1 \cap L_2)$$
$$= 2 + 2 - 0$$
$$= 4 = \dim V.$$

Por tanto, $\boxed{L_1 + L_2 = V}$