ALGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA
DOBLE PROGRAMA DE INFORMÁTICA–MATEMÁTICAS

Prueba intermedia 1 (Jueves 3/10/2013)

APELLIDOS:..

NOMBRE:.. DNI:....................................

---

[3] **1.** Sea V el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $\vec{v}_1 = (1, -1, -1)$ y $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$, y sea $P_V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal (con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$) sobre V.

Hallar la matriz de P_V en la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

---

[3] **2.** Considerar $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar dado por

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2.$$

Hallar la adjunta de la aplicación lineal $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

---

[4] **3.** Considerar la aplicación ortogonal (con el producto escalar usual) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada, en la base canónica de $\mathbb{R}^3$, por la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix},$$

donde ϕ es tal que $\cos\phi \neq 0$.

a) Demostrar que es una aplicación ortogonal.

b) Hallar la expresión canónica de la aplicación y determinar qué tipo de aplicación es (giro alrededor de un eje o giro alrededor de un eje más reflexión); no olvidar determinar el coseno del ángulo de giro en función de ϕ.

c) Hallar un vector director del eje de giro. (Nota: no es necesario que sea unitario).

---

[1] **4.** [BONO] Sea U un subespacio de un espacio vectorial euclídeo W. Sean P_U y $P_{U^\perp}$ las proyecciones sobre U y $U^\perp$, respectivamente. Demostrar que la aplicación $L : W \to W$ definida por

$$L = P_U - P_{U^\perp}$$

es una aplicación ortogonal.

[SUGERENCIA: Tener en cuenta que, por definición de proyección ortogonal, $P_U + P_{U^\perp} = \mathrm{Id}$.]

SOLUCIÓN

① $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Opción 1: usar la fórmula $P_V = A(A^t A)^{-1} A^t$, donde A es la matriz cuyas columnas son $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

Matriz de P

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 5/6 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Opción 2: 1) $P_V(\vec{x}) = a(\vec{x})\vec{v}_1 + b(\vec{x})\vec{v}_2$

2) $\vec{x} - P_V(\vec{x}) \perp \vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$.

$$0 = \langle \vec{x} - a(x)\vec{v}_1 - b(x)\vec{v}_2, \vec{v}_1 \rangle = \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{v}_1 \rangle}_{x_1 - x_2 - x_3} - a(x) \underbrace{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_1 \rangle}_{3} - b(x) \underbrace{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}_{0}$$

$$= x_1 - x_2 - x_3 - 3a(x) \Rightarrow \boxed{a(x) = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3)}$$

$$0 = \langle \vec{x} - a(x)\vec{v}_1 - b(x)\vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle = \underbrace{\langle \vec{x}, \vec{v}_2 \rangle}_{x_1 + x_2} - a(x) \underbrace{\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle}_{0} - b(x) \underbrace{\langle \vec{v}_2, \vec{v}_2 \rangle}_{2}$$

$$= x_1 + x_2 - 2b(x) \Rightarrow b(x) = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$P_V \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(x_1 - x_2 - x_3) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5x_1}{6} + \frac{x_2}{6} - \frac{x_3}{3} \\ \frac{x_1}{6} + \frac{5x_2}{6} + \frac{x_3}{3} \\ -\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\boxed{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}}_{\text{matriz de } P_V} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

2

Opción 1: usar matrices.

$$\left\langle \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^t \begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}^t P \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

(donde $P = \begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}$).

$$L\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_1+x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, \text{ donde } A = \begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}.$$

Sea B la matriz de L^* en la base canónica.

La ecuación que caracteriza L^* es

$$\langle L(\vec{x}), \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, L^*(\vec{y})\rangle \quad \forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$$

$$\overset{\forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2}{\iff} \langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle x, B\vec{y}\rangle \iff (A\vec{x})^t P\vec{y} = \vec{x}PB\vec{y} \quad \forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2$$

$$\iff (\vec{x})^t A^t P\vec{y} = \vec{x}PB\vec{y} \quad \forall \vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^2 \iff A^tP = PB$$

$$\iff B = P^{-1}A^tP = \begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&7\\1&3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}13&29\\-5&-11\end{pmatrix}. \text{ Por tanto } \boxed{L^*\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13&29\\-5&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}}$$

Opción 2: Hallar base O.N., expresar L en esta base y hacer su traspuesta.

Sea $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Poner

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - \frac{\overbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\rangle}^{=2}}{\underbrace{\langle \vec{u}_1, \vec{u}_1\rangle}_{=1}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}.$$

$\|\vec{v}_2\|^2 = 1$, y por tanto $\boxed{\beta = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}\right\}}$ es base O.N.

$$[L]^\beta_\beta = [Id]^{can}_\beta [L]^{can}_{can} [Id]^\beta_{can} = \begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-3\\1&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&-5\\1&-1\end{pmatrix}. \text{ Por tanto, } [L^*]^\beta_\beta = \begin{pmatrix}3&1\\-5&-1\end{pmatrix}$$

(la traspuesta).

Nota: $$[L^*]^{can}_{can} = \begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\-5&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13&29\\-5&-11\end{pmatrix}$$

Opción I

③ (a) L ortogonal $\Leftrightarrow$ $A^t A = I$, donde A es la matriz de L en la base canónica.

$$A^t A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ 0 & -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi$

$\operatorname{sen}\phi\cos\phi - \cos\phi\operatorname{sen}\phi$

$\Rightarrow$ L ortogonal.

b) $\det(L) = 1 \cdot (\cos^2\phi + \operatorname{sen}^2\phi) = 1 > 0$

Por tanto es un giro de ángulo α, con forma canónica

$$\boxed{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ 0 & \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{array}\right)}$$

Las trazas de A y de la forma canónica son iguales, y por tanto $-\operatorname{sen}\phi = 1 + 2\cos\alpha$

$$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{-1-\operatorname{sen}\phi}{2}}$$

c) El eje de giro tiene el autovector de autovalor 1 como director.

$$(A - 1\cdot I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \cos\phi & -1-\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -v_1 + v_3 = 0 \\ v_1\cos\phi - (1+\operatorname{sen}\phi)v_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \begin{pmatrix} 1+\operatorname{sen}\phi \\ \cos\phi \\ 1+\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix}}$$

es el vector director del eje de giro

Opción 2 (para ej. 3)

a) Notar que las columnas (o las filas) son ortonormales.

b) Diagonalizar:

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ \cos\phi & -\lambda-\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 \operatorname{sen}\phi + \cos^2\phi + \lambda\operatorname{sen}\phi + \operatorname{sen}^2\phi$$

$$= -(\lambda^3 + \lambda^2 \operatorname{sen}\phi - \lambda\operatorname{sen}\phi - 1).$$

Es fácil ver que $\lambda = 1$ es solución (porque sabemos que $\lambda = 1$ ó $\lambda = -1$ tiene que ser solución).

Por tanto, es un giro.

Para hallar el ángulo de giro, hallar el autovalor complejo:

$$-(\lambda^3 + \lambda^2\operatorname{sen}\phi - \lambda\operatorname{sen}\phi - 1) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda(\operatorname{sen}\phi + 1) + 1)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{-(\operatorname{sen}\phi+1) \pm \sqrt{(\operatorname{sen}\phi+1)^2 - 4}}{2} = \cos\alpha \mp \operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = -\frac{(\operatorname{sen}\phi + 1)}{2}}$$

c) Igual que antes (hallar autovector correspondiente al autovalor $\lambda = 1$).

④ (BONO)

$$\langle L(\vec{x}), L(\vec{y})\rangle = \langle P_u(\vec{x}) - P_{u^\perp}(\vec{x}), P_u(\vec{y}) - P_{u^\perp}(\vec{y})\rangle$$

$$= \langle P_u(\vec{x}), P_u(\vec{y})\rangle - \underbrace{\langle \underset{\in u^\perp}{P_{u^\perp}(\vec{x})}, \underset{\in u}{P_u(\vec{y})}\rangle}_{=0}$$

$$- \underbrace{\langle \underset{\in u}{P_u(\vec{x})}, \underset{\in u^\perp}{P_{u^\perp}(\vec{y})}\rangle}_{=0} + \langle P_{u^\perp}(\vec{x}), P_{u^\perp}(\vec{y})\rangle$$

$$= \underline{\langle P_u(\vec{x}), P_u(\vec{y})\rangle + \langle P_{u^\perp}(\vec{x}), P_{u^\perp}(\vec{y})\rangle}.$$

Por otro lado, usando la sugerencia,

$$\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle = \langle \overbrace{P_u(\vec{x}) + P_{u^\perp}(\vec{x})}^{\vec{x}}, \overbrace{P_u(\vec{y}) + P_{u^\perp}(\vec{y})}^{\vec{y}}\rangle$$

$$= \langle P_u(\vec{x}), P_u(\vec{y})\rangle + \underbrace{\langle \overset{\in u}{P_u(\vec{x})}, \overset{\in u^\perp}{P_{u^\perp}(\vec{y})}\rangle}_{=0 \text{ (porque } u \perp u^\perp)}$$

$$+ \underbrace{\langle \underset{\in u^\perp}{P_{u^\perp}(\vec{x})}, \underset{\in u}{P_u(\vec{y})}\rangle}_{=0} + \langle P_{u^\perp}(\vec{x}), P_{u^\perp}(\vec{y})\rangle$$

$$= \underline{\langle P_u(\vec{x}), P_u(\vec{y})\rangle + \langle P_{u^\perp}(\vec{x}), P_{u^\perp}(\vec{y})\rangle}.$$

Por tanto, $\langle L(\vec{x}), L(\vec{y})\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$, y por tanto L es ortogonal.