Estadística I
Grado en Matemáticas, UAM, 2018-2019

Sugerencia de ejercicios para repaso de cuestiones probabilistas varias

Exponenciales, uniformes, normales y Gammas

1. Sea X una variable $\textsc{Exp}(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Es decir, $f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, para $t \geq 0$, y $f_X(t) = 0$ para $t < 0$. Halla la media, la varianza y la función de densidad de la variable $Y = 1/X$.

2. Sea X una variable $\textsc{unif}(0,1)$. Halla la media, la varianza, y la función de densidad de la variable $Y = e^X$.

3. Comprueba que

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{2\pi}$$

(Sugerencia: escribe I^2 como una integral doble y pasa a polares).

4. Prueba que, si $x \geq 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2/2} dt < \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ e^{-x^2/2}.$$

(Sugerencia: observa que, en el rango de integración, $t/x > 1$. Añade ese factor y luego integra por partes). Deduce una estimación para el valor de $1 - \Phi(x)$.

5. a) Prueba que, para $k \geq 0$,

$$\Gamma(k + \tfrac{1}{2}) = \frac{(2k)!}{4^k\, k!}\ \sqrt{\pi} \quad \text{para cada entero } k \geq 0.$$

Aquí, Γ es la función Gamma de Euler.

b) Usa el apartado anterior para comprobar que, si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, entonces

$$\mathbf{E}(X^{2k}) = \frac{(2k)!}{2^k k!}\,, \quad \text{para } k \geq 0\,.$$

6. Sea X una variable aleatoria $\textsc{gamma}(\lambda, t)$. Comprueba que, para cada $k \geq 1$,

$$\mathbf{E}(X^k) = \frac{(t+k-1)\cdots t}{\lambda^k}.$$

Deduce que

$$\mathbf{E}(X) = \frac{t}{\lambda} \quad \text{y} \quad \mathbf{V}(X) = \frac{t}{\lambda^2}.$$

Halla $\mathbf{E}(1/X)$.

Sumas de variables idénticas e independientes

7. a) Sean X e Y dos variables aleatorias, uniformes en el conjunto $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ (es decir, se toma cada uno de esos valores con probabilidad $1/n$) e independientes. Determina la función de masa de la variable $X + Y$.

b) Sean ahora X e Y variables independientes y uniformes en $[0, 1]$. Calcula la función de densidad de $X + Y$.

8. Prueba que si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$ son dos variables normales independientes, entonces $X + Y$ es una variable normal:

$$X + Y \sim \mathcal{N}(0, 2)\,.$$

(Sugerencia: completar cuadrados).

Ejercicios adicionales

9. a) Prueba que si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ e $Y \sim \mathcal{N}(\nu, \eta^2)$ son variables normales independientes, entonces $X + Y$ es una variable normal:

$$X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \eta^2)\,.$$

(Sugerencia: completar cuadrados).

b) Prueba que, en general, dados $a, b \in \mathbb{R}$ (no simultáneamente nulos),

$$aX + bY \sim \mathcal{N}(a\mu + b\nu, a^2\sigma^2 + b^2\eta^2)\,,$$

10. Prueba que si $X \sim \text{GAMMA}(\lambda, t)$ e $Y \sim \text{GAMMA}(\lambda, s)$ (variables gammas con el mismo parámetro λ) son independientes, entonces $X + Y \sim \text{GAMMA}(\lambda, t + s)$.