Conjuntos y Números

Curso 2002-2003

Hoja 9

Álgebra: Números y letras

Los polinomios y sus monomios

1. ¿Puede ocurrir que al multiplicar dos polinomios distintos de cero y simplificar los monomios semejantes, obtengamos 0?

2. Efectuar las siguientes multiplicaciones:

$$\begin{aligned}
(1+x+2x^2-x^5)\cdot(-3+2x+x^5) &= \\
(x^2+y)\cdot(x^3+x^2y+xy^2+y^3) &= \\
(x^2+y^2+z^2)\cdot(xy+xz+yz) &= \\
(x+y+z+w)^2\cdot(x+y-z-w) &= \\
(x-1)\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) &= \\
(x+1)\cdot(1-x+x^2-x^3+x^4) &=
\end{aligned}$$

3. Agrupa todos los monomios semejantes entre sí:

$$\sqrt{3}\,x^2,\ ab^2,\ \frac{2}{3}\,a^2b,\ -7x^2,\ -\sqrt{5x^4},\ -\frac{1}{2}\,ab^2,\ -\frac{1}{2}\,x\,.$$

4. Buscar los valores de m y n para que los polinomios siguientes sean iguales:

a) $7mx^2y-(\sqrt{3}+7)yx^n=-\sqrt{3}\,x^2y+2yx^2$;

b) $\dfrac{20}{3}\,x^3(mx)=\dfrac{1}{3}\,x^n+x^4$;

c) $\dfrac{25a^3b^4}{ma^2b}=\dfrac{1}{3}\,a^nb^3$.

Fracciones algebraicas

5. Dados dos números x e y no negativos, definimos las siguientes medias:

$$M=\frac{1}{2}(x+y) \qquad G=\sqrt{x\,y} \qquad H=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=\frac{2xy}{x+y}\,,$$

(media aritmética) (media geométrica) (media armónica)

Comprobar que $M\geq G\geq H$. ¿Cuándo se tiene que $M=G=H$?

6. Simplificar el resultado de la suma siguiente:

$$S(y)=\frac{(y-a)(y-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(y-a)(y-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(y-b)(y-c)}{(a-b)(a-c)}\,.$$

(Sol.: $S(y)=1$).

7. Observemos que:

$$\begin{aligned}
1+\frac{1}{x} &= \frac{x+1}{x}\\
\frac{1}{1+\frac{1}{x}} &= \frac{1}{\frac{x+1}{x}} = \frac{x}{x+1}\\
\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} &= \frac{1}{1+\frac{x}{x+1}} = \frac{x+1}{2x+1}\\
\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}} &= \frac{1}{1+\frac{x+1}{2x+1}} = \frac{2x+1}{3x+2}.
\end{aligned}$$

Calcula los tres términos siguientes.

8. Calcular la suma: $\dfrac{1}{2ab^2}+\dfrac{3}{5a^2b}+\dfrac{6}{abc^2}$.

9. Sumar: $\dfrac{1}{x^2-4}+\dfrac{2(x-2)}{x^3-x^2-x-2}+\dfrac{3(x^2+x+1)}{x-2}$.

10. Determinar si son equivalentes las siguientes parejas de fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{2x^3+x^2-5x+2}{2x^2-7x+3}$ y $\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-2x-3}$.

b) $\dfrac{x^3+x^2-9x-9}{x^3-2x^2-9x-18}$ y $\dfrac{x^4-x^2}{x^4-3x^3+2x^2}$.

11. Simplificar las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{(x^2-1)x}{(x+1)^2(x^2-2x)}$, b) $\dfrac{x^3-x}{(3x^2-3)(x+2)}$,

c) $\dfrac{x^4+81-18x^2}{2(x^4-81)}$, d) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}$.

12. Operar y simplificar al máximo:

a) $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{2(x+1)}-\dfrac{2}{x^2-1}$;

b) $\left(\dfrac{2x-1}{(x-1)(x+1)}-\dfrac{x}{x-1}\right) : \dfrac{3}{2x-2}$;

c) $\dfrac{ab^2-3a^2b}{b+(b-a)(b-2a)-(b^2+2a^2)}$.

El anillo $\mathbb{C}[x]$

13. Supongamos que $\mathrm{grad}(P)=n\geq 0$, $\mathrm{grad}(Q)=m\geq 0$. Demostrar que:

1) $\mathrm{grad}(P\cdot Q)=m+n$.

2) $\mathrm{grad}(P+Q)\leq \mathrm{máx}\{m,n\}$.

3) Supongamos las siguientes reglas aritméticas: $m+(-\infty)=-\infty$, para todo $n\in\mathbb{N}$; $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$. Demostrar que 1) y 2) siguen siendo válidas en el caso en el que P, o Q, sean la constante cero.

14. Demostrar que el conjunto $\mathbb{C}[x]$, dotado con las operaciones de suma y producto de polinomios, es un anillo abeliano con elemento unidad.

15. Completar la igualdad: $(x^2-4)(x+\_\_)=(x+2)(x+3)(x+\_\_)$.

16. (Polinomios interpoladores). Dados dos números, $a \neq b$, existe un polinomio, P, de grado uno que toma valores prefijados, $P(a)$ y $P(b)$, a saber:

$$P(x)=P(a)\frac{x-b}{a-b}+P(b)\frac{x-a}{b-a}\,.$$

Análogamente, si damos tres números distintos, a, b y c, y valores $P(a)$, $P(b)$ y $P(c)$, el polinomio:

$$P(x)=P(a)\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+P(b)\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+P(c)\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}\,,$$

es de grado 2 y toma estos valores.

Hallar un polinomio de tercer grado de manera que $P(0)=1$, $P(1)=2$, $P(2)=3$ y $P(3)=4$.

División de polinomios

17. Efectuar las divisiones siguientes:

1) $(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1) : (x^2+x+1)$;

2) $\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-1}$;

3) $\dfrac{7x^6+6x^5+5x^4+4x^3+3x^2+2x+1}{x^3+x-1}$;

4) $\dfrac{\sqrt{3}x^4-\sqrt{2}x^3+x-2}{\sqrt{6}x^2-x+1}$;

5) $\dfrac{\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x}{\frac{1}{120}x-\frac{1}{240}}$;

6) $\dfrac{x^7+1}{x+1}$.