Hoja 9: Integral de Riemann

1.- Prueba que la función $f(x) = [x]$ es integrable en $[0, 5]$ y calcula $\int_0^5 [x]\, dx$.

2.- Da un ejemplo de una función definida en un intervalo $[a, b]$, no integrable, y tal que f^2 sea integrable.

3.- Sea una función continua en $[a, b]$. Definimos la *media* o *valor esperado* de f sobre $[a, b]$ como

$$E(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

(a) Sean M y m respectivamente el máximo y el mínimo de f sobre [a,b]. Demuestra que $m \leq E(f) \leq M$. Si f es constante, ¿cuál es su valor esperado?

(b) Supongamos que f es impar (es decir, $f(x) = -f(-x)$). Halla $E(f)$ sobre $[-a, a]$. (Sugerencia: interpreta la integral en términos de áreas).

(c) Evalúa $\int_{-a}^a x^7 \operatorname{sen}(x^4)\, dx$.

4.- Calcula los siguientes límites expresándolos como límites de sumas de Riemann:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^r + 2^r + \cdots + n^r}{n^{r+1}}, \quad r > 0; \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n\,(n+n)}} \right).$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\,n+k}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)\,k}{n^3}.$$

INTEGRALES Y PRIMITIVAS

5.- Sea f una función continua en $[a, b]$, no negativa, y que cumple $\int_a^b f(x)\, dx = 0$. Prueba que f es cero en todos los puntos.

6.- Sean las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \in [0, 1], \\ x+1 & \text{si} \quad x \in (1, 2]. \end{cases} \qquad \text{y} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0, \\ \displaystyle\int_0^x f(t)dt & \text{si} \quad x \in (0, 2]. \end{cases}$$

Determina $F(x)$ de forma explícita y prueba que es continua en el intervalo $[0, 2]$, aunque $f(x)$ no lo sea.

7.- Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(t^2)\, \ln(1+t^2)\, dt, \quad G(x) = \int_{x^2}^1 \cos^2(t^2)\, dt, \quad H(x) = \int_{-e^x}^{\operatorname{sen}^2 x} \cos(\ln(2\,t^2))\, dt.$$

8.- Encuentra una función f definida y continua en $[0,\infty)$ tal que

$$\int_0^{x^2} (1+t)\, f(t)\, dt = 6\, x^4.$$

9.- Sea $f : [0,4] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \le x < 3, \\ x+a & \text{si} \quad 3 \le x \le 4. \end{cases}$$

¿Qué valor debemos dar a a para que exista una función F en $[0,4]$ con $F'(x) = f(x)$? Encontrar todas las funciones F posibles que cumplan la condición anterior.

10.- Sea $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, y sea G su función inversa. Hallar $G'(0)$.

INTEGRALES IMPROPIAS

11.- Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias y en caso afirmativo calcular su valor:

$$(1) \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx \qquad (2) \int_2^\infty \frac{x}{x^2-x-2}\, dx \qquad (3) \int_0^1 \ln x\, dx \qquad (4) \int_1^\infty \frac{x}{1+x^4}\, dx$$

$$(5) \int_2^\infty \frac{dx}{x\, \ln^2 x} \qquad (6) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{4+x^2}\, dx \qquad (7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x\,(1-x)}} \qquad (8) \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

12.- Estudia la convergencia de las siguientes integrales impropias:

$$(1) \int_1^\infty e^{-x}\, x^\alpha dx, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (2) \int_0^\infty \frac{dx}{2\,x + (x^3+1)^{\frac{1}{2}}} \qquad (3) \int_0^\infty \frac{x}{(1+x^4)^{\frac{1}{2}}}\, dx$$

$$(4) \int_0^{1/2} \frac{dx}{(-\ln x)^\alpha\, x}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad (5) \int_{-\infty}^\infty \frac{x}{\cosh x}\, dx \qquad (6) \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\, dx$$

CÁLCULO DE ÁREAS

13.- a) Halla el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 8 - x^2$, $g(x) = x^2$.

b) Hallar el área limitada entre las gráficas de $f(x) = 1/(x^2+1)$, $g(x) = \dfrac{1}{2}|x|$.

c) Calcular el área comprendida entre las curvas $y = x\, e^{-x}$, $y = x^2\, e^{-x}$ para valores de $x \ge 1$.

d) Hallar el área limitada por la curva $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{1/2}$, su asíntota vertical y los ejes de coordenadas.