Conjuntos y Números

Curso 2002-2003

Hoja 8

Números complejos

1. Demostrar las propiedades siguientes de la suma y el producto de números complejos:

1. Asociativa (suma y producto).
2. Conmutativa (suma y producto).
3. Distributiva, del producto respecto de la suma.
4. $(0,0)$ es elemento neutro para la suma.
5. $(1,0)$ es elemento neutro para el producto.
6. Elemento opuesto para la suma: $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$.
7. Si $(a,b)\neq(0,0)$ entonces

$$(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)\,.$$

2. Demostrar las desigualdades: $\big||z|-|w|\big|\leq|z-w|\leq|z|+|w|$.

3. Calcular $\arg(z)$ en los casos: $z=\frac{2}{1-i\sqrt{3}}$; $z=\left(\sqrt{3}-i\right)^6$.

4. Sea $r>0$ una constante. Demostrar que la ecuación del círculo de radio r centrado en un punto w es: $|z|^2-2\mathrm{Re}\,(z\overline{w})+|w|^2=r^2$.

5. Calcular las raíces de la ecuación $z^4+16=0$.

6. Deducir la identidad

$$1+z+z^2+\cdots+z^n=\frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

cuando $z\neq1$ es un número complejo. Demostrar la identidad

$$\frac{1}{2}+\cos\theta+\cdots+\cos(n\theta)=\frac{\mathrm{sen}\,((n+1/2)\theta)}{2\,\mathrm{sen}(\theta/2)}\,,\quad 0<\theta<2\pi\,.$$

7. Calcular las raíces quintas de la unidad.

8. Demostrar que z es real si y solo si $z=\overline{z}$.

9. Dados dos números complejos z, w, demostrar las identidades siguientes:

$$\begin{aligned}|z+w|^2&=|z|^2+2\mathrm{Re}\,z\cdot\overline{w}+|w|^2\,;\\|z-w|^2&=|z|^2-2\mathrm{Re}\,z\cdot\overline{w}+|w|^2\,;\end{aligned}$$

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)\,.$$

Interpretar geométricamente la tercera de ellas.

10. Demostrar por inducción que si $z=z_1+z_2+\cdots+z_n$ y $w=w_1\cdot w_2\cdot\cdots\cdot w_n$ entonces:

$$\overline{z}=\overline{z}_1+\overline{z}_2+\cdots+\overline{z}_n,\qquad\overline{w}=\overline{w}_1\cdot\overline{w}_2\cdot\cdots\cdot\overline{w}_n\,.$$