CÁLCULO DE ÁREAS

1. Calcula el área limitada

a) entre el eje X y la gráfica de $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[0, 2k\pi]$ donde $k \in \mathbb{Z}^+$;

b) entre el intervalo $[-\pi, \pi]$ del eje X y la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$.

2. Halla el área limitada entre las gráficas de los pares de funciones que se indican:

$$a)\ f(x) = \frac{2}{4x^2+1} \qquad \text{y} \qquad g(x) = 2|x|,$$

$$b)\ f(x) = x\big(e^x + 1\big) \qquad \text{y} \qquad g(x) = x + x^2 e^x,$$

3. Dada $f(x) = x^2 - 2x + 7$, consideramos el triángulo curvilíneo T limitado entre las tangentes en $x = 0$ y $x = 2$ y la gráfica de f. Halla el área de T.

4. Halla el área limitada entre la curva definida por $y^2 = 3x$ y la recta $2y - 2x + 3 = 0$.

5. a) Obtén, utilizando integrales, que el área del círculo es πr^2.
b) Deduce del apartado anterior el área de un sector circular de radio r y ángulo α.

6. Dados $a, b \in \mathbb{R}^+$, calcula el área de la región limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

7. Calcula el área de la región plana limitada por la párabola de ecuación $(y-2)^2 = x - 1$, la tangente a esta párabola en el punto $(2, 1)$ y el eje OX.

8. Calcula el área del recinto formado por los puntos (x, y) del plano que verifican

$$y^2 \geq 9x \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 - 36 \leq 0.$$

CÁLCULO DE ÁREAS Y VOLÚMENES DE CUERPOS DE REVOLUCIÓN

9. Deduce, usando integrales, que el volumen de la esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y que el volumen de un cono recto de altura h y radio de la base r es $\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

10. Consideremos la región tridimensional infinita $\mathcal{R}$ obtenida al hacer girar la gráfica de $f(x) = x^{-1}$ alrededor del eje X para $x \geq 1$. Comprueba que el volumen de $\mathcal{R}$ es finito y sin embargo su área (lateral) es infinita. Por tanto, se da la paradoja de que pintar $\mathcal{R}$ requiere un área infinita de pintura pero, si es transparente, basta verter un volumen finito de pintura en su interior.

11. Halla el volumen del cuerpo engendrado por la curva

$$y^2 = \frac{1}{9}x(x-3)^2 \quad \text{con} \quad 0 \leq x \leq 3$$

al girarla alrededor del eje OX.

12. Halla el área de la región plana definida por las inecuaciones:

$$2y - x^2 \geq 0 \qquad \text{y} \qquad 2x + y^2 \leq 0\,,$$

y el volumen del cuerpo engendrado por dicha region al girar alrededor del eje X.

13. Estudia la convergencia de las siguientes series mediante el criterio de la integral:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},\qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log^2 n},\qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n},$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1},\qquad e)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\log(n)\log(\log n)},\qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n},$$

14. Compara $s_N=\sum_{n=1}^{N}1/n$ (la N-ésima suma parcial de la serie armónica) con la integral de la función $f(x)=1/x$ en intervalos adecuados y concluye que para todo $N\in\mathbb{Z}^+$ se tiene que $|s_N-\ln N|\le 1$. En particular, $s_{1\,000\,000\,000}<22$ a pesar de que $\lim s_N=\infty$ porque la serie armónica diverge.

15. Explica con detalle, empleando sumas superiores e inferiores, por qué si f es creciente en $[1,N]$, $N\in\mathbb{Z}^+$, entonces

$$f(2)+f(3)+\cdots+f(N)\ge\int_1^N f(x)\,dx\ge f(1)+f(2)+\cdots+f(N-1).$$

Toma $f(x)=\ln(x)$ para probar la desigualdad $1\ge\dfrac{N^Ne^{1-N}}{N!}\ge\dfrac{1}{N}$ y explica cómo obtener a partir de ella el valor de $\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

16. Una partícula se mueve a lo largo del eje X describiendo una trayectoria $x=x(t)$ con velocidad $v(t)=At^2+1$. Calcula A sabiendo que $x(1)=x(0)$.

17. La proporción x de moléculas de un gas en la atmósfera disminuye cuando la altura crece con una tasa de variación proporcional a x, es decir,

$$\frac{dx}{dh}=-Cx$$

donde h es la altura en kilómetros sobre el nivel del mar.

a) Dividiendo entre x e integrando, halla una fórmula para $x=x(h)$.

b) Para el oxígeno, $C=0.07$. ¿A qué altura la proporción de oxígeno es la mitad de la que hay a nivel del mar? Responde a la misma pregunta para el hidrógeno, para el que $C=0.006$.

c) Teniendo en cuenta que a nivel del mar hay unas 400 000 moléculas de oxígeno por cada una de hidrógeno, ¿a qué altura habrá más hidrógeno que oxígeno?

18. Calcula la integral $\int_0^{1/\sqrt{3}}\arctan x\;dx$ integrando por partes. Sustituye $\arctan x$ por su serie de Taylor (en cero) e integra término a término. Concluye de ambos resultados la fórmula

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{18}=\log\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{1\cdot 2}\Big(\frac{1}{3}\Big)^1-\frac{1}{3\cdot 4}\Big(\frac{1}{3}\Big)^2+\frac{1}{5\cdot 6}\Big(\frac{1}{3}\Big)^3-\frac{1}{7\cdot 8}\Big(\frac{1}{3}\Big)^4+\frac{1}{9\cdot 10}\Big(\frac{1}{3}\Big)^5-\dots$$