

Estadística I
Grado en Matemáticas, UAM, 2018-2019

Hoja 7-B. Tests generales y funciones de potencia

CÁLCULO DE FUNCIONES DE POTENCIA

1. Una fábrica empaqueta pastillas de jabón en cajas de 1000 unidades. En el control de calidad interno se da una caja por “buena” si el porcentaje de pastillas defectuosas que contiene es inferior al 2 %.

Llamemos p al porcentaje de pastillas defectuosas que contiene cada caja. Para contrastar la hipótesis $H_0 : p \leq 2\%$, se realiza el siguiente test: se toman 10 pastillas (supongamos, por simplicidad, que se devuelven a la caja tras examinarlas) y si sale (al menos) una defectuosa, se devuelve la caja (se rechaza la hipótesis).

a) Calcula el nivel de significación del test.

a) ¿Cuántas pastillas se deberían mirar (con la condición de que en cuanto haya una defectuosa, se devuelve la caja) para que el nivel de significación fuera del 5 %?

2. En una piscifactoría se desea contrastar la hipótesis (H_0) de que el porcentaje de peces adultos que miden menos de 20 cm es, como máximo, del 10 %. Para ello, se toma una muestra de 6 peces y se rechaza H_0 si se encuentra más de uno con longitud inferior a 20 cm.

a) ¿Cuál es el nivel de significación de este contraste?

b) Supongamos que, en realidad, hay un 5 % de peces que miden < 20 cm (y por tanto H_0 es cierta). ¿Con qué probabilidad la rechazaríamos?

c) Supongamos ahora que hay un 20 % de peces que miden < 20 cm (y por tanto H_0 es falsa). ¿Con qué probabilidad la aceptaríamos?

3. La longitud de los peces de una piscifactoría sigue una normal $\mathcal{N}(\mu, 1)$, donde μ es un parámetro que se expresa en centímetros.

Se desea contrastar la hipótesis $H_0 : \mu \leq 9$.

Para ello se diseña el siguiente test: se toman 10 ejemplares y se anotan sus longitudes. Si se encuentra al menos un pez de longitud ≥ 13 , se rechaza la hipótesis H_0 .

Calcula la función de potencia de este test y determina su nivel de significación.

4. Una variable X sigue una exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Se desea contrastar la hipótesis

$$H_0 : \lambda > 1$$

usando muestras de tamaño 10.

Para ello, se diseña el siguiente test: dada la muestra aleatoria (x_1, \dots, x_{10}) , se rechaza H_0 si el mayor de estos valores supera un cierto valor $t > 0$. Se pide hallar t para que el nivel de significación de este test sea del 5 %.

5. Modelamos el número de días que sobrevive una cierta bacteria con una variable aleatoria X que sigue una distribución geométrica de parámetro $p \in (0, 1)$.

Se pretende contrastar la hipótesis $H_0 : p > 0,2$. Para ello, se diseña el siguiente test: se analizarán 10 bacterias, se anotará cuántos días sobrevive cada bacteria, y si todas ellas duran 3 o más días, entonces se rechazará la hipótesis. Halla la función de potencia del test y su nivel de significación.

6. Sea $X \sim \text{UNIF}[0, a]$. Aquí, a es un parámetro positivo. Para un $A > 0$ dado, queremos contrastar la hipótesis $H_0 : a \leq A$. Hazlo con un test de razón de verosimilitud. Determina la función de potencia del test.

7. La variable X es $\text{UNIF}[-a, a]$, donde a es un parámetro positivo.

a) Halla el estimador de máxima verosimilitud de a .

b) Queremos contrastar la hipótesis $H_0 : a \leq 4$. Dado un calibre $c \in (0, 1)$, escribe el correspondiente test de razón de verosimilitudes y determina su función de potencia.

8. El error que se comete en la medición de una magnitud es una v.a. X cuya función de densidad es

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}} e^{-x^2/(2\theta)},$$

siendo $\theta > 0$ un parámetro que se desea estimar. Obtener el test de razón de verosimilitud de nivel α para contrastar $H_0 : \theta \leq \theta_0$ frente a $H_1 : \theta > \theta_0$.

9. La variable X tiene función de densidad

$$f(x; \lambda) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}, \quad x \in \mathbb{R},$$

donde λ es un parámetro positivo. Se quiere contrastar la hipótesis $H_0 : \lambda = 2$. Especifica la región de rechazo del test de razón de verosimilitudes correspondiente al nivel/calibre $c \in (0, 1)$.

10. Sea $X \sim \text{UNIF}[0, a]$. Queremos contrastar la hipótesis $H_0 : a = 1$. Tomamos una muestra (X_1, X_2) de X de tamaño 2 y rechazamos la hipótesis si $X_1 + X_2 \leq c$, donde c es un cierto número positivo.

a) Determina la función de potencia del test correspondiente a un valor de $c \in (0, 1)$ dado.

b) Halla el valor de c que se corresponde con un nivel de significación del test de $\alpha = 5\%$.