Conjuntos y Números

Curso 2002-2003

Hoja 7

Relaciones de orden

1. Comprobar que las siguientes son relaciones de orden:

1. El orden "$\leq$" en los naturales $\mathbb{N}$; en los enteros $\mathbb{Z}$; en los racionales $\mathbb{Q}$; y en los reales $\mathbb{R}$.
2. La inclusión "$\subseteq$" en $\mathcal{P}(X)$ (partes de X).
3. La relación de divisibilidad en $\mathbb{N}$.
4. En $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la relación R dada por:
$$(a,b)\,R\,(c,d) \quad \text{si y solo si} \quad (a \leq c) \wedge (b \leq d)\,.$$
5. El orden lexicográfico, o alfabético, en el conjunto de las palabras de un idioma.
6. En el conjunto de las funciones $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos $f \leq g$ si y solo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [0,1]$.

2. Dado un conjunto ordenado, $(X;R)$, sea $xR^{-1}y$ si y solo si yRx. Demostrar que $(X;R^{-1})$ es también un conjunto ordenado (con el orden inverso R^{-1}).

3. En $(\mathbb{R};\leq)$ hallar el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de los conjuntos siguientes:
$$(0,1);\ [0,1);\ (0,1];\ [0,1);\ \{2^{-n}\}_{n=1,2,3,\ldots};\ \mathbb{Q} \cap [-\pi,\pi]\,.$$

4. Sea el conjunto cuyos elementos son los conjuntos
$$I_m = \{\dot{m}\} = \{k \cdot m\}_{k\in\mathbb{Z}}\,, \quad m = 2,3,4,\ldots\,,$$
es decir: $X = \{I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, \ldots\}$. Definamos la relación $I_m R I_k$ si y solo si $I_m \subset I_k$. Determinar los elementos maximales.

5. ¿Son equivalentes $(N,\leq)$ y $(\mathbb{Q},\leq)$?

6. Demostrar las propiedades siguientes:

a) Si $(X;R)$, $(Y;S)$ son equivalentes y R es un orden total, entonces S es también total.

b) Si existe $\min(X)$ entonces también existe $\min(Y)$, para cualesquiera par de órdenes equivalentes $(X;R)$, $(Y;S)$.

c) Probar la propiedad análoga a b) para los máximos.

d) Si f es la aplicación biyectiva que realiza la equivalencia de los órdenes $(X;R)$, $(Y;S)$, entonces f lleva elementos maximales en elementos maximales.

7. Demostrar que si $(X;R)$ está bien ordenado, entonces todo otro conjunto ordenado, $(Y;S)$, y del mismo tipo que $(X;R)$, estará asimismo bien ordenado.

8. a) Demostrar que todo conjunto numerable admite un buen orden.

b) Si $(X;R)$ está bien ordenado, entonces la relación R induce un buen orden sobre cada intervalo inicial
$$I_X(a) = \{x \in X \mid xRa, x \neq a\}\,.$$