

Probabilidad II
Tercero de Matemáticas
Curso 2007-2008

Hoja 6 (camino aleatorio)

1. Considera un camino aleatorio en los enteros con barreras absorbentes en 0 y en $N \in \mathbb{N}$, en el que en cualquier tiempo la partícula da un salto de -1 con probabilidad α , permanece donde estaba con probabilidad β , o da un salto de $+1$ con probabilidad γ , donde $\alpha, \beta, \gamma > 0$ y $\alpha + \beta + \gamma = 1$. La condición de absorción significa que si en un tiempo n la partícula está en nivel N (respectivamente, 0), en el paso siguiente continúa en ese nivel.

Supongamos que la partícula comienza en tiempo 0 en el nivel a , $0 \leq a \leq N$. Demuestra que la probabilidad de que la partícula quede atrapada en el nivel N es

$$\frac{a}{N} \quad (\text{si } \alpha = \gamma); \quad \frac{(\alpha/\gamma)^a - 1}{(\alpha/\gamma)^N - 1} \quad (\text{si } \alpha \neq \gamma).$$

2. Una partícula realiza un camino aleatorio en los enteros (con $p = \mathbf{P}(X_n = +1)$) comenzando desde $S_0 = 0$. Prueba (sugerencia: condicionar sobre el primer movimiento) que si $p \neq \frac{1}{2}$, entonces la probabilidad de alcanzar el nivel N o el nivel $-N$ antes de volver a visitar el nivel de partida 0 es

$$(p - q) \frac{p^N + q^N}{p^N - q^N}.$$

¿Cuánto vale esa probabilidad en el caso simétrico $p = q$?

3. Damos un nivel $N \in \mathbb{N}$. Consideremos un camino aleatorio en los enteros (con $p = \mathbf{P}(X_n = +1)$) que parte de un nivel a , $0 \leq a \leq N$, y que tiene una barrera *absorbente* en el nivel 0 y con una barrera *retenedora* en el nivel N . Es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(S_{n+1} = N | S_n = N) &= p, & \mathbf{P}(S_{n+1} = 0 | S_n = 0) &= 1, \\ \mathbf{P}(S_{n+1} = N - 1 | S_n = N) &= (1 - p), & \mathbf{P}(S_{n+1} = \pm 1 | S_n = 0) &= 0. \end{aligned}$$

Denotemos por $e(a)$ el tiempo medio que transcurre hasta que el camino aleatorio queda absorbido en el nivel 0. Demuestra que

$$e(a) = a(2N - a + 1) \quad \text{si } p = \frac{1}{2}.$$

Ejercicios de Simulación.

- Simular el camino aleatorio en los enteros. Es decir, sortear muestras de la secuencia $S_1, S_2, S_3, \dots$
- Simular el camino aleatorio que parte de a , $0 \leq a \leq N$, que queda absorbido en los niveles 0 y N , y comprobar los resultados sobre probabilidad de ruina y de duración media.
- Simular el camino aleatorio que queda retenido en el nivel N y absorbido en nivel 0.
- Simular la estrategia de Kelly ($p > q$) y comprobar la optimalidad de la elección de la fracción de Kelly: $p - q$.
- Simular la variante de la apuesta de Kelly en que se apuesta una fracción α si la fortuna está por encima del nivel inicial, y otra fracción β si la fortuna está por debajo del nivel de partida. Analizar.