Probabilidad II
Tercero de Matemáticas
Curso 2006-2007

Hoja 6 (esperanza condicionada y martingalas)

1. Notación: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad, X una variable aleatoria definida en él, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ es una σ-álgebra generada por una partición finita $\{B_1, \dots, B_n\}$.

Comprueba las siguientes propiedades de la esperanza condicionada:

a) Si X es $\mathcal{G}$-medible, entonces $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = X$.

b) Si X es independiente de $\mathcal{G}$, entonces $\mathbf{E}(X|\mathcal{G}) = \mathbf{E}(X)$.

c) Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathbf{E}\big(\mathbf{E}(X|\mathcal{G})\big|\mathcal{H}\big) = \mathbf{E}(X|\mathcal{H})$.

d) $\mathbf{E}(X|\{\emptyset, \Omega\}) = \mathbf{E}(X)$.

2. Estamos apostando a que salga cara cuando se lanza una moneda regular. Codificamos los sucesivos éxitos o fracasos con una sucesión de variables aleatorias i.i.d. $(Y_1, Y_2, \dots)$, cada una de las cuales toma los valores 1 y -1 con probabilidad $1/2$.

Llamemos X_n a la fortuna en tiempo n del jugador que apuesta siguiendo las estrategias:

a) "a la Casanova". Es decir, la primera apuesta es de 1. Si ganamos (sale cara), nos retiramos. Si no, doblamos la apuesta. Y así, sucesivamente: en cuanto salga cara nos retiramos, y si no, seguimos doblando la apuesta.

b) "Bold play". Empezamos con fortuna $X_0 = a$ y deseamos obtener una cantidad $N > a$. En cuanto obtengamos (o sobrepasemos) este objetivo, nos retiramos. Apostamos, en cada paso, toda la fortuna disponible, a menos que con una apuesta inferior podamos conseguir exactamente el objetivo N.

c) Empezamos con $X_0 = 100$. Las dos primeras apuestas son de 10. A partir de la tercera hacemos lo siguiente: miramos los dos lanzamientos anteriores y apostamos en función del número de caras que hayan salido. Si no ha salido ninguna, apostamos 10; si ha salido una, apostamos 20; y si han salido dos, apostamos 30.

Describe la fortuna acumulada con las estrategias anteriores en la forma

$$X_n = X_{n-1} + \lambda_n Y_n \,,$$

con $\lambda_n = f_n(Y_1, \dots, Y_{n-1})$.

3. Sea $Y_1, Y_2, \dots$ una sucesión de variables aleatorias i.i.d., cada una de las cuales toma los valores 1 y -1 con probabilidades p y q. Llamemos $S_n = Y_1 + \cdots + Y_n$, con $S_0 = 0$. Comprueba que la sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$X_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{S_n}$$

es martingala (con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_n)$ asociada a las Y_j) y deduce que $\mathbf{E}((q/p)^{S_n}) = 1$.

4. De nuevo las Y_n son variables que toman valores ± 1, pero ahora con probabilidad $1/2$ cada uno de ellos. Tomamos una sucesión de números $(a_1, a_2, \dots)$ y consideramos la sucesión de variables aleatorias (X_n) dadas por

$$X_0 = 0\,, \qquad X_n = X_{n-1} + a_n Y_n \quad \text{para cada } n \geq 1.$$

Comprueba que la sucesión (Z_n) dada por $Z_n = X_n^2 - b_n$, con $b_n = \sum_{j=1}^n a_j^2$, es $\mathcal{F}_n$-martingala y deduce que

$$\mathbf{E}(X_n^2) = \sum_{j=1}^{n} a_j^2\,.$$

5.

a) Sean Y_n variables aleatorias i.i.d., tales que $Y_n > 0$ y $\mathbf{E}(Y) = 1$. Comprueba que la sucesión (X_n) dada por

$$X_0 = 1\,, \qquad X_n = \prod_{j=1}^{n} Y_j \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

es martingala.

b) Sean Y_n variables aleatorias i.i.d. que toman valores ± 1 con probabilidad $1/2$ cada uno. Comprueba que la sucesión (X_n) dada por

$$X_0 = 1\,, \qquad X_n = \frac{e^{a(Y_1+\cdots+Y_n)}}{\cosh(a)^n} \qquad \text{para cada } n \geq 1,$$

es martingala.

c) Aplicación financiera: sea R_n la rentabilidad en el periodo de tiempo entre $n-1$ y n. Esto es, si empezamos con una inversión de X_0, el valor de nuestra inversión tras tiempo n es

$$X_n = X_0 e^{R_1} \cdots e^{R_n}\,.$$

Digamos que $R_n = r + aY_n$, donde Y_n es una variable aleatoria que toma valores ± 1 con probabilidad $1/2$ cada uno. Calcula cuánto vale, en media, nuestra inversión en tiempo N comprobando que

$$\frac{X_n}{e^{rn}\cosh(a)^n} \qquad \text{es martingala.}$$

6. La urna de Pólya. En una urna tenemos bolas blancas y negras. Digamos que en tiempo 0 hay $B_0 = 1$ bolas blancas y $N_0 = 1$ negras. En cada instante de tiempo, se extrae al azar una bola de la urna y se mira su color: si es blanca, se devuelve a la urna y se añade una blanca; si es negra, también se devuelve a la urna, pero ahora se añade una negra. Llamemos B_n y N_n al número de bolas de cada color que hay en tiempo n y sea P_n la proporción de blancas que hay en la urna en tiempo n. Comprueba que la sucesión (P_n) es martingala.

¿Y si empezáramos con una composición inicial de $B_0 = 100$ y $N_0 = 100$? ¿Y si fuera $B_0 = 1$, $N_0 = 2$?

7. Las variables Y_j representan las sucesivas cifras del desarrollo en base 3 de un número del intervalo $[0, 1]$. Construimos una sucesión (X_n) de la siguiente manera:

$$X_0 = 1\,;$$

$$X_1 = \begin{cases} a & \text{si la primera cifra es un 0;} \\ 0 & \text{si la primera cifra es un 1;} \\ b & \text{si la primera cifra es un 2;} \end{cases} \qquad \text{con } (a+b)/3 = 1;$$

y, para cada $n \geq 2$,

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{si alguna de las primeras } n \text{ cifras es un 1;} \\ a^{\#\text{ 0's en primeras } n \text{ cifras}} \cdot b^{\#\text{ 2's en primeras } n \text{ cifras}} & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Comprueba que (X_n) es martingala. Calcula $\mathbf{E}(X_n)$ y comprueba que $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$.

Sugerencia: Simular en el ordenador y comprobar *empíricamente* los resultados de los ejercicios anteriores.
