Matemática Discreta
Segundo curso del Grado en Matemáticas, UAM
Curso 2011-2012

Hoja 6

Resolución de ecuaciones de recurrencia lineales

1. Encuentra fórmulas explícitas para los términos de las sucesiones definidas por:

$$\begin{array}{llll} (a) & u_0 = 0, u_1 = 1, & u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, & n \geq 2; \\ (b) & u_0 = 1, u_1 = 3, & u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, & n \geq 0. \end{array}$$

Soluciones: a) $u_n = 3^n - 2^n$. b) $u_n = 2^{n/2}\big(\cos(\pi n/4) + 2\sin(\pi n/4)\big)$.

2. Resuelve las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{array}{lll} (a) & u_{n+1} - u_n = 3n^2 - n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 3; \\ (b) & u_{n+1} - 2u_n = 2^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 1; \\ (c) & u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 7 + n + n^2 & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 2; \\ (d) & u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \cdot 2^n + 7 \cdot 3^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 4. \end{array}$$

Soluciones: a) $u_n = n^3 - 2n^2 + n + 3$. b) $u_n = 2^n(1 + n/2)$.

c) $u_n = \frac{47}{54}\, n(-2)^n - \frac{29}{27}(-2)^n + \frac{1}{9}\, n^2 + \frac{11}{27}\, n + \frac{29}{27}$.

d) $u_n = 3 \cdot 2^n - 3 \cdot 3^n + \frac{35}{18}\, n\, 3^n + \frac{7}{18}\, n^2\, 3^n$.

3. Una sucesión de números $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ viene definida por

$$u_0 = 0\,, \qquad \frac{u_n + u_{n-1}}{2} = n\,, \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

Halla una fórmula explícita para u_n y calcula el valor de u_{1235}.

Cuestiones varias

4. Sea a_n el número de listas de longitud n, con símbolos $\{0, 1, 2\}$, que no tienen unos consecutivos. Halla una regla de recurrencia para a_n y resuélvela. ¿Y si exigiéramos que no aparecieran tres unos consecutivos?

5. Sea $M = \{A, B, C\}$ y sea S_n el número de listas de longitud n formadas con las letras de M que tienen las letras A en bloques de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.

6. Nos regalan tres sellos y decidimos iniciar una colección. Al año siguiente añadimos 8 sellos más. Si cada año compramos un número de sellos igual al doble de los que compramos el año anterior, ¿al cabo de cuántos años habremos superado el millón de sellos?

7. Consideramos las sucesión de números $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \qquad n \geq 0.$$

(a) Comprueba que la sucesión (I_n) cumple que

$$I_0 = e - 1\,, \qquad I_n = e - nI_{n-1}, \qquad \text{para } n \geq 1.$$

b) Para resolver la relación anterior, vamos a hacer un "cambio de variables": considera la sucesión $(J_n)_{n=0}^{\infty}$ dada por

$$J_n = (-1)^{n+1}\frac{I_n}{n!\,e} \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

y comprueba que

$$J_n = J_{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

c) Obtén una fórmula para J_n y deduce la correspondiente fórmula para I_n.

8. La sucesión de Fibonacci (F_n) viene dada por

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 2.$$

a) Establece un criterio para decidir si F_n es par o impar.

b) ¿Qué ocurre si miramos la sucesión (F_n) módulo 4? ¿Y para un módulo m general?

c) Vamos ahora a extender la sucesión de Fibonacci a los números negativos de la siguiente manera: seguimos con $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, y definimos los demás términos de la sucesión mediante la regla $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, que ahora es válida para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. ¿Cuál es la relación entre F_n y F_{-n}?

9. Disponemos de n cerillas para formar palabras con las letras I (una cerilla) y V (dos cerillas). Sea P_n el número de palabras diferentes que podemos formar de esta forma utilizando las n cerillas.

a) Halla una fórmula de recurrencia para P_n.

b) ¿Qué relación tienen los P_n con los números de Fibonacci F_n?

c) Sea $P_{n,k}$ el número de palabras contadas en P_n que tienen k letras. Calcula $P_{n,k}$.

d) Utiliza los apartados b) y c) para demostrar la fórmula

$$F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$$