Matemática Discreta
Segundo curso del Grado en Matemáticas, UAM
Curso 2010-2011

Hoja 6

1. Sea a_n el número de listas de longitud n, con símbolos $\{0, 1, 2, 3\}$, que no tienen unos consecutivos. Halla una regla de recurrencia para a_n y resuélvela. ¿Y si quisiéramos contar las listas que no tienen unos consecutivos, pero tampoco treses consecutivos?

2. Sea S_n el número de n-listas formadas con las letras $\{A, B, C\}$ que tienen las letras A en bloques de longitud par. Encuentra una relación de recurrencia para calcular S_n y resuélvela.

3. Empezamos un plan de pensiones con una aportación inicial de 1000 euros. Cada mes añadiremos 100 euros. Además, nos garantizan un tipo de interés efectivo mensual $R = 2\,\%$ (es decir, cada euro invertido en el plan se convierte en 1.02 euros al cabo de un mes). ¿Cuántos euros tendremos al cabo de 10 años?

4. Consideramos las sucesión de números (I_n) dada por

$$I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \qquad n \geq 0.$$

(a) Compruébese que la sucesión (I_n) verifica la relación de recurrencia

$$I_n = e - nI_{n-1}, \qquad \text{para } n \geq 1,$$

junto con la condición inicial $I_0 = e - 1$.

b) Para resolver la relación anterior, vamos a hacer un "cambio de variables": considérese la sucesión (J_n) dada por

$$J_n = (-1)^{n+1} \frac{I_n}{n!\, e} \qquad \text{para cada } n \geq 0.$$

y verifíquese que

$$J_n = J_{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad \text{para cada } n \geq 1.$$

c) Obténgase una fórmula para J_n y dedúzcase la correspondiente fórmula para I_n.

5. Disponemos de n cerillas para formar listas con las letras I (una cerilla) y V (dos cerillas). Sea P_n el número de listas distintas que se pueden formar usando las n cerillas.

a) Halla una fórmula de recurrencia para P_n.

b) ¿Qué relación tienen los P_n con los números de Fibonacci, F_n, definidos por la relación $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$? Justifica la respuesta.

c) Sea $P_{n,k}$ el número de palabras contadas en P_n que tienen k letras. Calcula $P_{n,k}$.

d) Utiliza los apartados b) y c) para demostrar la fórmula

$$F_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}$$

6. Encuentra fórmulas explícitas para los términos de las sucesiones definidas por:

$$\begin{array}{llll} (a) & u_0 = 0, u_1 = 1, & u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}, & n \geq 2; \\ (b) & u_0 = 1, u_1 = 3, & u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n, & n \geq 0. \end{array}$$

7. Resuélvanse las siguientes relaciones de recurrencia:

$$\begin{array}{lll} (a) & u_{n+1} - u_n = 3n^2 - n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 3; \\ (b) & u_{n+1} - 2u_n = 2^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 1; \\ (c) & u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n = 7 + n + n^2 & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 2; \\ (d) & u_{n+2} - 6u_{n+1} + 9u_n = 3 \times 2^n + 7 \times 3^n & \text{para } n \geq 0, \text{ con } u_0 = 0 \text{ y } u_1 = 4. \end{array}$$