Conjuntos y Números

Curso 2002-2003

Hoja 6

Números reales

1. Demuestra que no hay soluciones enteras a $5n^2 = m^2$, $7n^2 = m^2$, $11n^2 = m^2$. En general, que dado un número primo p no existe un racional m/n tal que $p = m^2/n^2$.

2. Aplica la técnica del ejercicio anterior, es decir, el Teorema Fundamental de la Aritmética, para mostrar que no existen racionales m/n que verifiquen las igualdades:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 2\,; \quad \left(\frac{m}{n}\right)^5 = 7\,; \quad \text{y, en general,} \quad \left(\frac{m}{n}\right)^k = p\,,$$

donde p es un número primo y $k > 1$ es un número natural.

3. Sea $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ la descomposición de n en factores primos. ¿Cuándo será $\sqrt[h]{n}$ un número racional?

4. Demostrar que

a) si la sucesión de números racionales $\{q_n\}$ es de Cauchy, entonces también lo son todas sus subsucesiones;

b) si la sucesión números racionales $\{q_n\}$ es convergente en $\mathbb{Q}$, entonces también lo son sus subsucesiones y todas tienen el mismo límite.

5. Designemos por $\mathcal{C}$ al conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de números racionales, y por $\mathcal{N}$ al subconjunto de las convergentes a cero. En $\mathcal{C}$ definimos la siguiente relación:

$$\{q_n\}R\{r_n\} \quad \text{si y solo si } \{q_n - r_n\} \in \mathcal{N}\,.$$

Demostrar que R es una relación de equivalencia en $\mathcal{C}$.

6. Demostrar que si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{a'_n\}$, $\{b'_n\}$ son sucesiones de Cauchy en $\mathcal{C}$ tales que:

$$\{a_n\}R\{a'_n\} \quad \text{y} \quad \{b_n\}R\{b'_n\}$$

entonces $\{a_n + b_n\}\,R\,\{a'_n + b'_n\}$ y $\{a_n \cdot b_n\}\,R\,\{a'_n \cdot b'_n\}$.

7. Demostrar que si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son elementos de $\mathcal{N}$ y $q \in \mathbb{Q}$, entonces las sucesiones $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n \cdot b_n\}$ y $\{qa_n\}$ son todas elementos de $\mathcal{N}$.

8. Sean $r = [\{a_n\}]$ y $s = [\{b_n\}]$ dos números reales (clases de equivalencia de sucesiones de Cauchy de números racionales). Se definen la suma y el producto:

$$r + s = [\{a_n + b_n\}] \qquad \text{y} \qquad r \cdot s = [\{a_n \cdot b_n\}]\,.$$

Demostrar que el conjunto de los números reales es un cuerpo[1] con estas dos operaciones (el neutro de la suma es $0 = [\{0\}] = \mathcal{N}$; el neutro del producto es $1 = [\{1\}]$).

Probar que la aplicación inyectiva $\varphi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(q) = [\{q\}]$ preserva la suma y el producto. Esto nos permite identificar $\mathbb{Q}$ con $\varphi(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{R}$.

9. Demostrar que $\leq$ es una relación de orden en $\mathbb{R}$. Demostrar más aún: que $\leq$ es un orden total (dados r y s en $\mathbb{R}$, o bien $r \leq s$ o bien $s \leq r$).

10. Demostrar que dado $r \neq 0$ existe $s = 1/r$ de manera que $s \cdot r = 1$. Sugerencia: sea $r = [\{a_n\}] > 0$; comprobar que existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $a_n \geq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Definir $s = [\{b_n\}]$, donde $b_n = (a_{n-n_0})^{-1}$. Comprobar que $\{b_n\}$ es efectivamente una sucesión de Cauchy de números racionales tal que

$$\lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 1\,.$$

[1] Para cada una de las operaciones, las propiedades asociativa, conmutativa y existencia de elementos neutro e inverso. Y, además, la distributiva del producto respecto a la suma.

11. La noción de sucesión de Cauchy de números reales es la extensión natural de la de racionales. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de Cauchy de números reales. Para cada n, sea q_n un número racional tal que $|a_n - q_n| < \frac{1}{n}$. Consideremos la sucesión $\{q_n\}$. Demostrar que:

i) $\{q_n\}$ es de Cauchy.

ii) Sea $r = [\{q_n\}]$; entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = r$.

Este ejercicio nos dice que $\mathbb{R}$ es completo: *Toda sucesión de Cauchy de números reales tiene un único límite real.*

12. Demostrar que el desarrollo decimal $x = 0, x_1x_2x_3\ldots$ es equivalente a la igualdad:

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{10^j} = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{10^j}\,.$$

Pero cada número natural $n > 1$ puede ser la base de un sistema de numeración. Cuando $n = 2$ solo tenemos dos dígitos: 0 y 1; y los desarrollos binarios de $x \in [0,1)$ son de la forma:

$$x = 0, x_1x_2x_3\ldots, \quad x_j \in \{0,1\}\,, \qquad x = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{2^j}\,.$$

Cuando $n = 3$ tenemos tres dígitos, 0, 1 y 2. Elaborar la teoría de los desarrollos decimales en bases 2 y 3, describiendo los intervalos de $[0,1)$ que dan lugar a las distintas cifras.

Hallar el desarrollo en base 2 del número racional $1/3$. Encontrar las tres primeras cifras decimales en base dos y en base tres de los números: e, π y $\sqrt{2}$.

13. Sea $n = p_1^{a_1}\cdots p_r^{a_r}$ la descomposición de n en factores primos. Demostrar que $\sqrt[k]{n}$ es racional si y solo si $k \mid a_j$ para todo $j = 1,\ldots,r$.

14. Probar que $y = \frac{x}{1-|x|}$ es una biyección entre $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$.

15. Probar que $\mathbb{R}^k$ y $\mathbb{R}$ son conjuntos equipotentes para todo $k = 1,2,3,\ldots$. Explicar qué ocurre en el caso:

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} \mid x_n \in \mathbb{R}\}\,.$$

16. Sea $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Demostrar que existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < q < x$.

17. Demostrar que cada número real positivo tiene una única raíz cuadrada positiva.

18. Demostrar que en una base de numeración k los decimales periódicos, desde un punto en adelante, corresponden a los números racionales.

19. Demostrar que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es equipotente con $\mathbb{R}$. Sugerencia: sean $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0,1)$ dada por $f(X) = 0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ siendo

$$a_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \notin X \\ 1 & \text{si } j \in X \end{cases}$$

y $g : [0,1) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$, dada por $g(0, a_1a_2a_3\ldots) = \{a_j10^j\}$, $a_j \in \{0,1,\ldots,9\}$. Demostrar que ambas, f y g, son inyectivas.

20. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros es numerable. Deducir que el conjunto de todos los números reales que son raíces de polinomios es numerable. ¿Qué puede decirse del conjunto de todos los números reales que no son raíz de ningún polinomio?

21. Probar que el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ es numerable. Deducir que el conjunto de los subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ no es numerable.

22. ¿Existe un conjunto X tal que $\mathcal{P}(X)$ sea infinito y numerable?

23. Demostrar que si $\text{card}(A) \le \text{card}(B)$ entonces $\text{card}(\mathcal{P}(A)) \le \text{card}(\mathcal{P}(B))$. Demostrar que si A y B son equipotentes, entonces también lo son $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$.

24. Demostrar que el conjunto de las líneas rectas del plano es equipotente con $\mathbb{R}$.