Cálculo 1 Curso 2010-2011

Primero curso, grado en Matemáticas (grupo 715)

Hoja 6: Aplicaciones de la derivada

derivadas y monotonía de funciones

1.- Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x(x+1)(x+2)$.

2.- Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

$$f(x) = \frac{x+2}{x^3}, \qquad f(x) = \frac{x}{\ln(x)}, \qquad f(x) = e^{-x^2}, \qquad f(x) = \frac{2x^2}{x+1}.$$

3.- Demuestra que $\operatorname{sen}(x) < x$ si $x > 0$, y que $\operatorname{sen}(x) > x$ si $x < 0$.

4.- Determina en qué intervalos es inyectiva (uno-uno) la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.

cálculo de máximos y mínimos

5.- Calcula los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

6.- (*)Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, encuentra el mínimo valor de la función

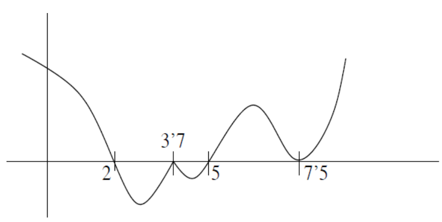
$$F(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} (x - a_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

7.- (*) Encuentra el valor máximo de la función $F(x) = \dfrac{1}{1+|x|} + \dfrac{1}{1+|x-2|}$.

8.- Demuestra que, de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

9.- En un trozo rectangular de cartón de 8 cm × 15 cm se han cortado cuatro cuadraditos iguales en cada esquina, de manera que la figura restante se puede doblar para construir una caja sin tapa. Halla el lado de los cuadrados cortados para que el volumen sea máximo.

10.- (*) Suponiendo que la derivada de una función tiene la gráfica de la figura, indica todos los valores en los que se alcanzan máximos y mínimos locales.



11.- La derivada de una función f es

$$f'(x) = x^3(x-1)^2(x+1)(x-2).$$

Indicar para qué valores de x la función f alcanza un máximo o un mínimo local.

Aplicaciones del teorema del valor medio

12.- Demuestra que la ecuación $x^3 - 3\,x + k = 0$, con $k \in \mathbb{R}$, tiene una o ninguna solución en $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de k existe efectivamente la solución?

13.- Demuestra que la ecuación $6\,x^4 - 7\,x + 1 = 0$ no tiene más de dos raíces reales distintas.

14.- Demuestra que la ecuación $6\,x^5 + 13\,x + 1 = 0$ tiene exactamente una raíz real.

15.- Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Comprueba que no existe ningún $a \in (-1, 1)$ tal que

$$f'(a) = \frac{f(-1) - f(1)}{(-1) - (1)}$$

y explica por qué esto no contradice el teorema del valor medio.

Derivadas y funciones inversas

16.- (*) a) Demuestra que si f, g son inyectivas (uno-uno) entonces $f \circ g$ también lo es. Halla $(f \circ g)^{-1}$ en términos de f^{-1} y de g^{-1}.
b) Halla g^{-1} en términos de f^{-1} sabiendo que $g(x) = 1 + f(x)$.
c) Sabiendo que h es una función tal que $h'(x) = \cos^2(\cos(x + 1))$ y que $h(0) = 3$, se pide hallar $(h^{-1})'(3)$.
d) Halla $(k^{-1})'(3)$, siendo $k(x) = h(x + 1)$ (h es la función del apartado anterior).

17.- (*) a) Da tres ejemplos de funciones continuas f tales que $f(x) = f^{-1}(x)$ para todo x. *Indicación: ten en cuenta la interpretación geométrica de f^{-1}.*
b) Demuestra que si f es creciente y $f(x) = f^{-1}(x)$ para todo x, entonces $f(x) = x$.

Cálculo de límites

18.- Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen} x \, \ln(x), \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x}, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^{\operatorname{sen}(1/x)}, \qquad \lim_{x \to 1} x^{1/(x-1)}.$$

19.- Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x(4x+3)} - 2x\right), \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)))}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x))}, \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{x + 1 + \operatorname{sen}(x^{2004})}{x + 5}.$$