Sobre cálculo de límites

1. Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos(\pi x)}{x^2-2x+1}$, b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cos(6x))}{\ln(\cos(3x))}$,

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$, d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ con $a, b, c > 0$,

e) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x \operatorname{sen}(a/x)$, f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x - 2\ln(1+x)}{x^2}$.

Sobre máximos/míminos y gráficas de funciones

2. Calcula los valores máximo y mínimo de $f(x) = x^3 - 3\,x^2 - 9\,x + 1$ en el intervalo $[-2, 6]$.

3. Dados $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, encuentra el mínimo valor de la función

$$F(x) = \Big(\sum_{k=1}^{n} (x-a_k)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Halla los intervalos de crecimiento/decrecimiento, de concavidad/ convexidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x + \frac{1}{x}$;
b) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x - 3$;
c) $f(x) = \operatorname{arc\,tg}(2x) - x$.

5. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^{1/x}$,
b) $f(x) = x\ln(x)$,
c) $f(x) = x + 1 - 1/x - 1/x^2$,

Para ello, busca los intervalos de definición, continuidad y derivabilidad de las funciones. Calcula y utiliza f' y f'' para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad, extremos locales (o relativos) y puntos de inflexión.

6. Dadas las funciones

a) $f(x) = 4x + x^{\frac{7}{2}}$; *b)* $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si} \quad x > 0 \\ -x^2+2x+1 & \text{si} \quad x < 0, \end{cases}$; *c)* $f(x) = \dfrac{|x|}{e^{|x-1|}}$,

se pide determinar su dominio, los límites en los extremos de los intervalos de su dominio, puntos de intersección con los ejes, intervalos de crecimiento/decrecimiento, máximos y mínimos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, recorrido. Con la infomación obtenida, dibuja las gráficas correspondientes.

MÉTODO DE NEWTON

7. Calcula aproximadamente, usando el método de Newton, la mayor solución de cada ecuación en el intervalo indicado:

$$a)\quad x^3 - 6x^2 - 15x + 1 = 0, \quad \text{con } x \in \mathbb{R};$$
$$b)\quad \cos x + x \operatorname{sen} x = 0, \quad \text{con } x \in [-2\pi, 2\pi].$$

8. Queremos resolver la ecuación $3t - 4t^3 = \frac{1}{2}$, con $0 < t < 1$.

a) Aproxima la solución con 2 iteraciones del método de Newton, comenzando en $t = 0$.

b) Usa el método de la bisección para comprobar que la aproximación del apartado anterior da al menos 4 cifras decimales de precisión.

APLICACIONES VARIAS

9. Demuestra que, de entre todos los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

10. Queremos construir un cercado rectangular de 20 metros cuadrados pegado a la pared de una granja (luego no es necesario construir uno de los lados). ¿Cuántos metros de cercado debemos construir como mínimo? En ese caso, ¿cuál es la relación entre los lados?

11. El número de individuos de una población (en miles) viene dado por

$$N(t) = 1 + (3-t)^2 e^{-t}, \ \text{con } t \geq 0, \qquad t = \text{ tiempo que transcurre (en años).}$$

¿Cuándo la población alcanza su valor máximo? ¿Cuál será la población a largo plazo? ¿Cuál es la velocidad máxima de crecimiento de la población?

12. Vamos a diseñar un programa de ordenador y antes de hacerlo calculamos de manera teórica su tiempo de ejecución, obteniendo

$$t = a^2n^2 + (n-a)n^3 + 80$$

donde t es el tiempo en milisegundos, n es el número de bits del dato de entrada y a es un parámetro que depende de cómo distribuyamos la carga de trabajo entre los diferentes procedimientos del programa.

a) Calcula a para que el programa sea lo más eficiente posible.

b) ¿Podemos conseguir que para datos iniciales grandes el tiempo de ejecución sea menor que n^4?

13. El volumen $V = V(T)$ de 1 gramo de agua (medido en cm^3) se expresa como función de la temperatura T por la siguiente fórmula (aproximada) obtenida experimentalmente:

$$v(T) = 1 + 8.38 \cdot 10^{-6}(T-4)^2.$$

¿A qué temperatura este volumen será mínimo? ¿Cuál es ese volumen mínimo? Usando el método de Newton, calcula aproximadamente la temperatura a la que el volumen es de 1.001 cm^3.

14. El movimiento de cierto punto por una recta está descrito por la siguiente dependencia entre su posición x y el tiempo $t \geq 0$:

$$x = at^2 + bt + c \quad \text{con} \quad a > 0\,.$$

¿Qué se puede decir de su aceleración? ¿Para qué tiempos t en un intervalo $[0, T]$ se alcanzan la velocidad mínima y máxima? ¿Cuál es la velocidad media en ese intervalo? ¿Para qué valor de t se alcanza la velocidad media?

Ejercicios extra

15. Creemos que dos cantidades físicas, x e y, están relacionadas de manera lineal, es decir $y = ax+b$ para ciertas constantes a y b. Experimentalmente hemos obtenido n pares de medidas diferentes: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Para elegir a, b de forma que se adapten a esos datos, vamos a buscarlos de manera que minimizen la cantidad D, que es igual a la suma de los cuadrados de las distancias verticales de la recta a los puntos obtenidos experimentalmente. Esto es,

$$D(a, b) = \sum_{j=1}^{n} \big(y_j - (ax_j + b)\big)^2.$$

Para ello:

a) Consideramos D como función de b y hallamos su mínimo.
b) El mínimo del apartado anterior va a depender de a, luego podemos escribirlo como $M = M(a)$. Hallamos el mínimo de $M(a)$.
c) Los valores de a y b que buscábamos son los que nos han salido en los apartados anteriores. ¿Cuál es la recta obtenida?

16. Estamos diseñando un videojuego y queremos que un personaje vaya de una ciudad a otra parando antes de llegar en algún punto de la costa para pescar. Suponiendo que una ciudad está en el pixel $(30, 50)$ y otra en $(60, 80)$ y que la costa es la línea de píxeles $(2t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ ¿cuál sería la trayectoria más corta a seguir por el personaje?

17. Desde nuestro puesto de controlador en un aeropuerto vemos en la pantalla del radar que un avión está siguiendo la trayectoria dada por la ecuación $y = 2 - x^{2/3}$, con $x \geq 0$. Si el aeropuerto está en el punto $(0, 0)$, ¿cuál es la distancia mínima a la que ha pasado el avión? Utiliza el método de Newton para aproximar la solución.