Probabilidad 1
Segundo de Matemáticas
Curso 2003-2004

Hoja 5

Decimos que una sucesión de variables $\{X_n\}$ converge, cuando $n \to \infty$, a X

- en **probabilidad** si, para todo $\varepsilon > 0$, $\mathbf{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$ cuando $n \to \infty$;
- en **distribución** si, para todo t, $\mathbf{P}(X_n \leq t) \to \mathbf{P}(X \leq t)$ cuando $n \to \infty$.

1. Supongamos que la sucesión de variables aleatorias Z_n converge a la variable aleatoria Z en probabilidad (o en distribución). Sean a y b números reales. Comprobar que la sucesión $aZ_n + b$ converge en en probabilidad (respectivamente, en distribución) a $aZ + b$.

2. Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con distribución uniforme en el intervalo $(0, a)$, y sea $Z_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Demuéstrese que

a) $Z_n \longrightarrow a$ en probabilidad, cuando $n \to \infty$,

b) $\sqrt{Z_n} \longrightarrow \sqrt{a}$ en probabilidad, cuando $n \to \infty$,

c) Si $U_n = n(1 - Z_n)$ y $a = 1$, entonces $\mathbf{P}(U_n \leq x) \longrightarrow \begin{cases} 1 - e^{-x}, & \text{si } x > 0\,, \\ 0, & \text{si } x \leq 0\,; \end{cases}$

de manera que U_n converge en distribución a una exponencial con parámetro 1.

3. Para cada n, sea X_n una binomial de parámetros n y p, con p fijo. Demuéstrese que X_n/n converge a p en probabilidad cuando $n \to \infty$.

4. Compruébese que si $X_n \to X$ e $Y_n \to Y$ en probabilidad, entonces $X_n + Y_n \to X + Y$ en probabilidad.

5. Dar un ejemplo de una sucesión de variables X_n tales que $X_n \to X$ en probabilidad, pero donde $\mathbf{E}(X_n)$ no converge a $\mathbf{E}(X)$.

6. Demuéstrese que X_n tiende a 0 en probabilidad si y sólo si $\mathbf{E}\left(\dfrac{|X_n|}{1 + |X_n|}\right) \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

7. Supongamos que $X_1, X_2, \ldots$ es una sucesión de variables aleatorias independientes (no suponemos que tienen la misma distribución). Llamemos $m_k = \mathbf{E}(X_k)$ y $\sigma_k^2 = \mathbf{V}(X_k)$. Supongamos que hay una constante R tal que $\sigma_k^2 < R$ y denotemos por

$$M_n = \frac{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}{n}\,.$$

Demuéstrese que, para cualquier ε,

$$\mathbf{P}\left(\left|\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) - M_n\right| < \varepsilon\right) \longrightarrow 1 \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

8. La posible nota de un alumno en el examen de una asignatura es una variable aleatoria con valores entre 0 y 100, de media 70 y de varianza 25.

a) Hállese una cota inferior para la probabilidad de que la nota del alumno quede entre 65 y 75.

b) Si la clase tiene 100 alumnos análogos, hállese una cota inferior para la probabilidad de que la nota media de la clase quede entre 65 y 75.

9. Aplicando el teorema del límite central a una sucesión de variables de Poisson, pruébese el siguiente cálculo de convergencia de una sucesión numérica:

$$e^{-n}\Big(\sum_{j=0}^{n}\frac{n^j}{j!}\Big) \longrightarrow \frac{1}{2}, \qquad \text{cuando } n \to \infty\,.$$

10. Sea Z una variable normal estándar. Calcúlense $\mathbf{E}(Z^2)$ y $\mathbf{E}(Z^4)$. Sea $Y = Z^2$. Hállese la función de densidad de Y, su media y su varianza.

Sea ahora $Z_1, Z_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias normales estándar independientes. Para cada natural n, definamos la variable S_n: $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i^2$.

- Úsese el teorema del límite central para comprobar que $\mathbf{P}\left(S_n \le n + k\sqrt{(2n)}\right)$ converge a un cierto límite, para cada k fijo, cuando $n \to \infty$.
- Demostrar que, para todo c fijo, $\mathbf{P}\,(S_n \le c)$ tiende a 0 cuando $n \to \infty$.

11. Sea S el número de caras que se obtienen al lanzar una moneda regular un millón de veces. Úsense la desigualdad de Chebychev y el Teorema del Límite Central para estimar:

- la probabilidad de que S quede entre 499.500 y 500.500,
- la probabilidad de que S quede entre 498.000 y 502.000.

12. En una encuesta se supone que una proporción p (desconocida) de gente en una población están a favor de una determinada nueva ley y que, consecuentemente, una proporción $1-p$ están en contra. Se toma una muestra (elegidos independientemente unos de otros) de tamaño n. Úsese el teorema del límite central para determinar qué tamaño n debe tener la muestra para que la estimación (a partir de la muestra) de la proporción p tenga, con probabilidad de un 95%, un error de a lo sumo 0,01.

13. Elegimos, de manera independiente, N números al azar en el intervalo $[0,1]$ (al azar quiere decir con distribución uniforme, y N será muy grande). Ahora calculamos la media aritmética de los *cuadrados* de estos N números: ¿qué esperamos obtener?

Explica con detalle el sentido de tu respuesta, enunciando el resultado que la justifique.

14. Una ruleta tiene 64 casillas, etiquetadas con los números del 1 al 64. Las casillas de la 1 a la 16 están pintadas de rojo; las casillas de la 17 a la 40, de verde, y el resto de azul. Cada vez que la bola cae en una casilla roja, recibimos un premio de 3 euros; el premio es de 7 euros si cae en verde y de 5 si cae en azul.

(a) Giramos la ruleta un número grande de veces, N, anotamos los premios conseguidos y calculamos su media aritmética. ¿Qué esperamos obtener?

(b) ¿Y si tomamos la media de los inversos de los premios obtenidos?

(Explica con detalle el sentido de tus respuestas, enunciando el resultado que las justifique).